

Jānis Cīrulis

KOMBINATORIKAS UN
VARBŪTĪBU TEORIJAS ELEMENTI

matemātikas profilkursam vidusskolā

ANOTĀCIJA

Šī izstrādne ir mācību līdzeklis (tā pirmā puse) nosaukumā minēto tēmu apgūvei, ko varētu gan vairāk vai mazāk patstāvīgi lasīt skolēni, gan izmantot skolotājs. Galvenais mērķis ir palīdzēt izprast vienkāršākos kombinatorikas un varbūtību teorijas jēdzienus un uzdevumu risināšanas metodes, pie tam akcentējot analogijas un kopsakarības starp abām tēmām. Tāpēc abu tēmu radniecīgie jēdzieni, principi, modeļi un fakti tiek aplūkoti paralēli (atšķirībā no par tradicionālu kļuvušās pieejas, kad vispirms kombinatorika, pēc tam varbūtību teorija tiek apgūtas katra par sevi, un kombinatoriskās skaitīšanas metodes vienīgi kalpo par līdzekli varbūtību aprēķināšanai). Teorijas izklāsts papildināts ar lielu skaitu piemēru un vingrinājumu, kam būtu ne vien jāpalīdz saprast teoriju, bet arī izstrādāt iemaņas kombinatorikas un varbūtību teorijas uzdevumu izpratnei un risināšanai. Ir arī uzdevumi patstāvīgam darbam.

Pielikumos ir pievienoti dažī komentāri par attiecīgo uzziņu materiālu krājumā "Diferencēti uzdevumi matemātikā", kā arī formulu kopradītājs. Mācību līdzeklis pašreiz vēl nav gluži pabeigts: tajā nav pēdējās nodaļas.

Saturs

1. Ievads	1
1.1. Daži piemēri un secinājumi	1
1.2. Vingrinājumi un uzdevumi	5
2. Izlases	7
2.1. Saskaitīšanas un sareizināšanas principi	7
2.2. Kas ir izlase?	9
2.3. Kombinatorikas pamatskaitļi	14
2.4. Ņūtona binoma formula	25
2.5. Uzdevumu risinājumu paraugi	29
3. Izmēģinājumi un notikumi	37
3.1. Kas ir izmēģinājums?	37
3.2. Notikumi un to salīdzināšana	39
3.3. Notikumu algebra	44
3.4. Notikumu novērtēšana: to apjomi un varbūtības	46
3.5. Varbūtiski izmēģinājumi	57
3.6. Uzdevumi	61
A pielikums: Formulu kopsavilkums	66
B pielikums: Par kādu uzzīņu materiālu	69

Priekšvārds

Šis priekšvārds domāts vispirms skolotājam, lai palīdzētu viņam gūt priekšstatu par mācību līdzekļa saturu un raksturu. Skolēnam vajadzētu pievērst uzmanību priekšvārda 3. un 4. punktam.

1. Kombinatorika un varbūtību teorija, kaut mijiedarbojas, ir divas patstāvīgas matemātikas nozares, un, jādodomā, arī tāpēc tās mēdz mācīt vairāk vai mazāk neatkarīgi vienu no otras, bet kombinatoriskus faktus reizi pa reizei tikai izmanto varbūtību aprēķināšanai pēc klasiskās definīcijas. Taču elementārajā līmenī, kādā tās apgūst skolā, tām abām ir daudz kopēju saskares punktu un analogiju arī pamatkonceptijās, un tas rāda, ka zināmā mērā te izpaužas vienu un to pašu ideju divējas puses. Pieminēsim tikai, ka gan kombinatorikai, gan varbūtību teorijai ir savi saskaitīšanas un sareizināšanas likumi, ka gan vienai, gan otrai ir savi priekšstati par izmēģinājumu (izvēļu) un notikumu neatkarību. Tāpēc ir vērts apgūt kombinatoriku un varbūtību teoriju ne šķirti, kā divus, kaut labus, kaimiņus skolas matemātikas programmā, un arī ne otru kā pirmās turpinājumu, bet cik vien iespējams tā, lai kļūtu skaidra to radniecība, kas veicinātu arī labāku attiecīgo jautājumu izpratni. No šādas pozīcijas raugoties sastādīts šis mācību līdzeklis, un tāpēc tas jāuzlūko kā zināmā mērā eksperimentāls. Tiesa, šo pieeju autors jau izmēģinājis, vairākus gadus mācot kombinatorikas un varbūtību teorijas elementus pirmā kursa studentiem.

Protams, ka eksperimentālais mācību līdzekļa raksturs mazinās interesi par to, taču domājams, ka arī skolēns vai skolotājs, kurš tādu vai citādu iemeslu dēļ to neizmanto pilnībā, tomēr varēs tajā atrast ko sev noderīgu.

2. Minēsim dažas šī mācību līdzekļa īpatnības.

Atbilstoši minētajai koncepcijai, gan kombinatorikā, gan varbūtību teorijā izklāsts tieši vai netieši balstās uz izmēģinājuma un notikuma jēdzieniem. Par tiem parasti runā, aizsākot varbūtību teoriju, taču tiem ir tīri kombinatoriska daba. Ja pierod pie šiem jēdzieniem jau sākumā, vēlāk ir vieglāk saskatīt līdzīgas shēmas dažādu uzdevumu risinājumos, arī tad, ja vieni pēc sava rakstura ir kombinatoriski, bet citi — varbūtiski.

Piemēram, mācību līdzekli izlases tiek raksturotas nevis kā kaut kādi priekšmetu sakopojumi, kuri apmierina tādas vai citādas prasības, bet kā atkārtoti izdarītu izvēļu (jeb izmēģinājumu) rezultāts. Tāda pieeja, protams, nav jauna, un ir zināmas tās priekšrocības. Pirmkārt, uzsvars pārvietojas no gala rezultāta uz izlases tapšanas vai veidošanas procesu, un tas atvieglo izlašu saskatīšanu uzdevumos. Otrkārt, gan sakārtotas un nesakārtotas izlases, gan izlases ar un bez atkārtojumiem tad parādās kā radniecīgi un vienlīdz dabiski objekti, un

ir izjūtams arī to kopsakars. Tāpēc visu četru veidu izlases mācību līdzeklī iztirzātas kopā — salīdzinājumā, kur var redzēt gan to līdzības, gan atšķirības. Arī reālos uzdevumos nereti gadās, ka, nedaudz izmainoties nosacījumiem, viena veida izlašu vietā parādās citādas. Tādu uzdevumu paraugi kā piemēri atrodami arī šai mācību līdzeklī.

Vairāki akcenti izklāstā likti, vadoties no tēzes, ka kombinatorikas un varbūtību teorijas kursa mērķis vidusskolā ir nevien iepazīstināt skolēnus ar noteiktu faktu kopumu, bet arī, cik nu tas iespējams, ar atbilstošu domāšanas stilu. Piemēram, tāpēc priekšroka dažādu rezultātu iegūšanā tiek dota kombinatoriskām vai, attiecīgi, varbūtiskām metodēm, nevis tīri aritmētiskām — pat tais nedaudzos gadījumos, kad pēdējās it kā ātrāk un vienkāršāk noved pie rezultāta (vietvietām lasītājam ir dota iespēja pašam salīdzināt dažādās pieejas).

Tai pašā laikā galvenais, ko vajadzētu iemācīt, ir prasme risināt uzdevumus, un šāda prasme ne kombinatorikā, ne varbūtību teorijā nedodas rokā viegli. Tāpēc šai mācību līdzeklī ir daudz piemēru ar uzdevumu risinājumiem, bet maz teorēmu. Dažādu faktu pamatojumi lielākoties tiek iegūti (vai pat paši fakti atklāti) piemērotu uzdevumu risināšanas gaitā. Tomēr vietām, it īpaši trešajā nodaļā, autoram nav izdevies izvairīties no smagnējības teorētiskā materiāla izklāstā.

Mācību līdzeklī netiek runāts par uzdevumiem, kuros galvenais ir pareizi izpildīt aprēķinus pēc zināmām formulām vai algebrisku pārveidojumu izdarīšana. Nenoliedzami, ka tādi uzdevumi kā «apreķināt $C_{50}^{48} - A_{25}^2$ », «atrisināt vienādojumu $A_x^3 = 56x$ », «vienkāršot $n! \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \right)$ » ir derīgi un pat vajadzīgi, lai nostiprinātu atmiņā dažas formulas vai iestrādātu dažas iemaņas, bet tie pieder pie kombinatorikas tikpat lielā mērā kā jautājums «cik taišņu var novilkt caur 25 punktiem, starp kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes?» — pie ģeometrijas. Šādi uzdevumi gana lielā skaitā atrodami, piem., uzdevumu krājumā

D. Kriķis, P. Zariņš, V. Ziobrovskis, *Diferencēti uzdevumi matemātikā*, 1, Zvaigzne ABC (trešais izd. 1996. g.).

Tālāk priekšvārdā un arī pašā mācību līdzeklī iezīme DU nozīmē atsauci tieši uz šo krājumu.

It īpaši kombinatorikas uzdevumos atbildēs parasti uzrādīts ne skaitlisks iznākums, bet izteiksme ar t.s. pamatskaitļiem ($C, A, P, \bar{C}, \bar{A}$), kuras vērtību aprēķinot tādu skaitlisku iznākumu var dabūt. Tā darīts divu iemeslu dēļ: pirmkārt, lai vēl pirms tīri aritmētisku aprēķinu izdarīšanas risinātājam būtu iespēja novērtēt savas domu gaitas pareizību, otrkārt, tāds atbildes izskats, pat ja nav citu komentāru, nereti var pateikt priekšā, kā uzdevumu rēķināt. Dažkārt, dažādi risinot, var iegūt visai atšķirīga izskata izteiksmes ar vienu un

to pašu skaitlisko vērtību. Raksturīgi šai ziņā ir daži uzdevumi otrās nodaļas pēdējā paragrāfā.

3. Šai punktā doti daži norādījumi par to, kas un kur mācību līdzeklī atrodams.

Pirmā nodaļa ir ievads, kur ar pāris piemēru palīdzību ilustrētas dažas kombinatoriku un varbūtību teoriju raksturojošas (un arī tās vienu no otras šķirošas) idejas. Tepat var arī gūt zināmu priekšstatu par t.s. statistisko pieeju varbūtību definēšanai; nekur tālāk gan par to vairs netiek runāts. (Jāpiezīmē, ka arī t.s. ģeometriskās varbūtības, kas īsti neiederas izmēģinājumu un iznākumu shēmā, mācību līdzeklī pārrunātas netiek, vismaz pagaidām nē.)

Otrā nodaļa satur minimālu materiālu kombinatorikā: tur izskaidroti daži kombinatorikas pamatprincipi, izlases jēdziens, ar piemēru palīdzību atklātas un pamatotas galvenās kombinatoriskās sakarības, ieskaitot izlašu skaita aprēķināšanas formulas, un aplūkota binomiālā teorēma (Ņūtona binoma formula). Piemēri kalpo arī kā ilustrācijas tam, kā dažādās tipiskās situācijās būtu jādomā, lai izprastu, kas īsti uzdevumā jāskaita, un arī tam, kādas kļūdas dažkārt pieļauj, skaitot sarežģītākas konfigurācijas. Arī pēdējais nodaļas paragrāfs satur vairākus uzdevumus (tai skaitā, no DU) ar atbildēm un vairāk vai mazāk detalizētiem norādījumiem risināšanai.

Izmēģinājumi un notikumi tajos aplūkoti trešās nodaļas sākumā. Pēc iepazīšanās ar tiem mēs pārejam uz notikumu algebru (darbībām ar notikumiem), tad uz notikumu novērtēšanu: notikumu novērtē vai nu nosakot tā apjomu (labvēlīgo izmēģinājuma iznākumu skaitu), vai tā varbūtību. Apjomu un klasisko varbūtību īpašības, ieskaitot divu notikumu apvienojuma un starpības, kā arī notikuma papildinājuma apjoma un varbūtības aprēķināšanas formulas izklāstītas paralēli, to izmantošana ilustrēta ar piemēriem. Tam seko papildus materiāls par izmēģinājumiem, kuros iznākumiem var nebūt vienādas varbūtības. Nodaļu atkal noslēdz uzdevumi ar atbildēm.

Ceturtajā un, varbūt, interesantākajā nodaļā (kura gan pagaidām mācību līdzeklī trūkst), tiek īpaši runāts par izmēģinājumiem, kuros iznākuma noteikšanai jāizdara vairāk nekā viena izvēle. Protams, jau pirmajā nodaļā apskatītās izlases īstenībā ir tādu izmēģinājumu iznākumi, bet šajā pēdējā nodaļā paliek tādi speciāli jautājumi, kas saistās ar notikumu kombinatorisko un varbūtisko neatkarību un nosacītām varbūtībām.

Pirmais pielikums ir mācību līdzeklī apskatīto kombinatorikas un varbūtību teorijas formulu un dažu teorēmu koprādītājs. Otrajā pielikumā atrodami vairāki komentāri par DU otrajā pusē esošo uzziņu materiālu: autoraprāt, vairākas vietas tajā būtu koriģējamas, pirms to izmantot.

4. Visbeidzot, daži norādījumi par mācību līdzekļa lietošanu, un tie šoreiz būtu jāņem vērā vispirms skolēnam.

Pirmās nodaļas — ievada pirmo paragrāfu vajadzētu izlasīt un izpētīt: tālākajā tekstā vairākkārt būs atsauces uz to. Arī otrā paragrāfa uzdevumus un vingrinājumus būtu vēlams izpildīt, kaut tas nav nepieciešami, lai varētu sekot turpmākajam.

Arī pamattekstā vietvietām iestarpināti vairāki vingrinājumi. Tos vajadzētu tūdaļ pat (pirms lasīt tālāk) izpildīt, nevis atlikt uz vēlāku laiku, jo tie domāti lasītā nostiprināšanai vai lai veicinātu tā labāku izprašanu. Lielākā daļa piemēru īstenībā ir tam pašam nolūkam; daudzos gadījumos piemēru iztirzājums noved arī pie kāda jauna fakta vai sagatavo lasītāju jaunam jēdzienam.

Katra nodaļa, izņemot pirmo, sadalīta paragrāfos, kuru numuri (lai būtu vieglāk orientēties, šķirstot mācību līdzekli) sastāv no divām daļām: pirmā ir nodaļas numurs, bet otrā — paragrāfa numurs šai nodaļā (ieskatieties satura rādītājā!). Vairums paragrāfu tālāk dalīti punktos, kuru numuri ir viendaļīgi. Piemēri un teksta vingrinājumi katrā nodaļā numurēti no jauna un vienlaidus cauri visiem paragrāfiem; to numuri arī ir divdaļīgi. Norāde DU, kas dažviet atrodama piemēros vai uzdevumos, ir uz šī priekšvārda otrajā punktā minēto uzdevumu krājumu. Ja tāda norāde (ar numuru) ir pie kāda uzdevuma, tad tas nozīmē, ka tas ir aizņemts no šī uzdevumu krājuma pirmās daļas desmitās nodaļas. Piem., (DU 123) nozīmē 123. uzdevumu šai nodaļā.

5. Autors atvainojas lasītājiem par to, ka viņa neuzmanības dēļ vispirms tika izplatīta šī mācību līdzekļa nepilnīgi izredīgēta versija. Tagadējā versijā ir izlabotas daudzas drukas un arī nopietnākas kļūdas, un ir arī vairāki papildinājumi. Drīzumā būs pieejama jauna versija ar šobrīd vēl neesošo ceturto nodaļu.

Visi piebildumi, iebildumi un jautājumi autoram sūtāmi uz elektronisko adresi jc@lanet.lv.

1999. g. 24. aprīlī

1. Ievads

Šī ievadparagrāfa nolūks ir, iztīrējot konkrētus piemērus, dot priekšstatu par to, ko un kā dara kombinatorikā un varbūtību teorijā.

1.1. Daži piemēri un secinājumi

1. *Jānis un Pēteris spēlē šādu spēli: abi vairākas reizes met divus spēļu kauliņus; uzvarējis būs tas, kurš mazāk metienos sasniegs simts punktu. Katrā atsevišķā metienā viņus tātad interesē uzkrītošo punktu summa. Mēs, vērojot spēli no malas, par metienā sagaidāmo summu, ko apzīmēsim ar s , varam uzdot dažāda tipa jautājumus, piem., šādus:*

- (1) Vai ir iespējams, ka (a) $s \leq 4$? (b) $s = 8$? (c) $s = 1$? (d) $s \geq 15$?
- (2) Cik dažādos veidos var izpildīties katrs no nosacījumiem (a), (b), (c), (d)?
- (3) Cik var būt dažādu metiena iznākumu, un cik dažādas summas s ir iespējamās?

Pārdomāsim, ko var atbildēt uz šiem jautājumiem.

(1) Acīmredzamas atbildes uz apakšjautājumiem (a), (b), (c) un (d) ir attiecīgi *jā*, *jā*, *nē*, *nē*. Tās dabūjam, apsverot, cik punktu iespējams uzmet ar katru kauliņu atsevišķi, un ņemot vērā, ka viena kauliņa uzkrītošo punktu skaits jeb, īsāk, šī kauliņa *uzkrītums* nekādi neietekmē otra kauliņa uzkrītumu. Proti, pat zinot, cik punktu uzkrītoši uz viena kauliņa, mēs sagaidām, ka otram kauliņam joprojām var būt jebkurš no sešiem iespējamiem uzkrītošiem. Šādi izpaužas abu kauliņu uzkrītumu *neatkarība* vienam no otra: tiem ir iespējams kombinēties jebkurā veidā.

(2) Protams, par (c) un (d) atbilde ir *nevienu veidā* (jeb 0 veidos). Pārdomājot nosacījumus (a) un (b), redzam, ka vispirms nepieciešams noskaidrot, ko īsti skaitīt (kas ir „izpildīšanās veids”). Viens iespējams precizējums ir: (a) var izpildīties trijos veidos ($s = 2$, $s = 3$ vai $s = 4$), bet (b) — vienā veidā. Interesantāk ir par metiena iznākumu uzskatīt nevis vienkārši uzkrītošo punktu summu, bet pašus kauliņu „uzkrītumus”, kurus sakaitot, šo summu dabū. Turpmākajā paliksim pie šī viedokļa.

Te nu jāšķiro divi gadījumi.

- (i) Abi kauliņi ir vienādi: pēc izdarītā metiena nav iespējams atšķirt, kurš ir kurš.
- (ii) Kauliņi atšķiras (pēc krāsas, lieluma, materiāla vai citādi), vai arī tos met vienu aiz otra (tad īstenībā pietiek ar vienu kauliņu).

Konkrētības labad norunāsim, ka viens no kauliņiem ir balts, otrs — melns.

Vienādu kauliņu gadījumā ne vairāk kā četrus punktus metienā, kā prasa nosacījums (a), var iegūt četrus veidos: uzkrīt divi vieninieki, vieninieks un divnieks, vieninieks un trijnieks vai arī divi divnieki. Metiena iznākums te ir divi skaitļi, kas nav lielāki par 6, jeb, kā matemātikā mēdz teikt, skaitļu *pāris*. Divus skaitļus gan var nosaukt vai pierakstīt dažādā secībā, bet tas šai gadījumā nespēlē lomu.

Tos četrus metiena iznākumus, kuri apmierina (a), īsi pierakstīsim tā:

$$[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2].$$

Kvadrātiekvavas mums atgādinās, ka šie pāri ir jāuztver kā *nesakārtoti*: $[1, 2]$ un $[2, 1]$ nozīmē vienu un to pašu iznākumu. Bet tieši astoņus punktus var iegūt trejādi: $[2, 6]$, $[3, 5]$ un $[4, 4]$.

Dažādu kauliņu gadījumā arī varētu izlemt (ja nav kādu papildus spēles nosacījumu), ka ir vienalga, uz kura no kauliņiem uzkrīt, piem., 1, bet uz kura — 2; citiem vārdiem sakot, ignorēt kauliņu atšķirības. Tad īstenībā atgriezamiem pie iepriekšējā gadījuma, tāpēc tālāk pieņemsim, ka tas nav vienalga. Līdz ar to var uzrādīt sešus veidus, kā metienā iegūstami ne vairāk kā četri punkti ((a) nosacījums):

$$b1 \text{ un } m1, b1 \text{ un } m2, m1 \text{ un } b2, b1 \text{ un } m3, b2 \text{ un } m2, m1 \text{ un } b3,$$

kur b nozīmē balto, bet m — melno kauliņu. Ja norunā, ka viena, teiksim, baltā kauliņa uzkrītumu vienmēr pieraksta pirmo, tad arī atbildi var pierakstīt īsāk:

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1);$$

šoreiz apaļās iekavas atgādinās, kā pāri jāuztver kā *sakārtoti*. Tieši astoņiem punktiem ((b) nosacījums) tādi iznākumi ir pieci:

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).$$

Tikpat labi varētu norunāt, ka, otrādi, pirmo vienmēr raksta melnā kauliņa uzkrītumu.

(3) Kā viegli redzēt, s var būt jebkurš naturāls skaitlis, sākot ar 2 un beidzot ar 12, pie tam neatkarīgi no tā, vai kauliņi ir vienādi vai dažādi. Šie gadījumi gan jāšķiro, atbildot uz uzdotā jautājuma pirmo daļu (cik ir dažādu metiena iznākumu). Ja kauliņi ir vienādi, skaitām pārus $[i, j]$, kur $1 \leq i \leq j \leq 6$; tad ir pavisam 21 iznākums. Ja kauliņi dažādi, skaitām pārus (i, j) , kur $1 \leq i, j \leq 6$. Tādu iznākumu pavisam ir 36.

2. Tagad pārdomāsim citāda rakstura jautājumus

- (4) Cik liela ir iespēja, ka (abus kauliņus metot vienreiz) izpildīsies nosacījums (a) $s \leq 4$, un cik liela, ka (b) $s = 8$?
- (5) Kuram no abiem šiem nosacījumiem lielākas izredzes izpildīties?

Šie jautājumi paredz, ka nosacījuma izpildīšanās iespēja tiek kaut kā raksturota skaitliski. Vienu tādu raksturojumu — nosacījumam labvēlīgo iznākumu skaitu jau apspriedām pirmajā punktā sakarā ar jautājumu (2). Tomēr tik vienkāršs raksturojums ne katrreiz ļauj pareizi salīdzināt dažādu notikumu īstenošanās iespējas.

Piemēram, ņemot vērā uz jautājumu (2) iegūtās atbildes, var piedāvāt šādu atbildi uz (5): ja kauliņi vienādi, (a) priekšrocību pret (b) var raksturot kā $4 : 3$, bet ja tie dažādi, šī priekšrocība ir $6 : 5$. Tas dod zināmu pamatu uzskatīt, ka gan vienādu, gan dažādu kauliņu gadījumā ticamāks ir nosacījums (a). Taču kā noteikt, vai (a) ir ticamāks kad kauliņi vienādi vai kad tie dažādi? Viena iespējama atbilde ir šāda: vienādiem kauliņiem (a) izpildās četros gadījumos no 21, bet dažādiem — sešos gadījumos no 36. Tā kā $\frac{4}{21} > \frac{6}{36}$, izlemjam, ka nosacījumam (a) lielāka iespēja izpildīties ir tad, kad kauliņi vienādi. Vēlāk redzēsīm, vai tiešām tā ir, bet tagad apskatīsim šādu ilustrāciju mūsu apsvērumiem.

Jānis ar Pēteri pa šo laiku mainījuši spēles noteikumus: uzvarējis būs tas, kuram pirmajam metienā uzkritīs punktu summa, kas nepārsniedz 4 ((a) nosacījums). Izrādās, ka Jānim abi kauliņi ir vienādi, bet Pēterim — dažādi. Vai šī spēle ir vienlīdzīga?

Lai labāk izprastu šo situāciju, iedomāsimies, ka abi spēlētāji katrai spēlei slēdz derības par to, kurš no abiem uzvarēs. Pēteris ir izlasījis pēdējo rindkopu pirms šī vingrinājuma un uzskata, spēle nav vienlīdzīga, proti, ka Jāņa izredzes pret viņējām ir $\frac{4}{21} : \frac{6}{36}$, tātad nedaudz lielākas. Tāpēc viņš pieprasa, lai kompensācijai Jānis riskētu ar lielāku derību likmi — teiksim, 24 santīmi pret 21 (jo $\frac{4}{21} \cdot 21 = \frac{6}{36} \cdot 24$). Vai jūs Jāņa vietā tam piekristu?

Iesim Jānim palīgā un izpētīsim Pētera priekšlikumu. Uzmanīgi padomājot, cik pamatoti ir iepriekš (pirms vingrinājuma) izdarītie vērtējumi, kļūst skaidrs, ka tie balstās uz visai dabisku pārlicību: visi iespējamie metiena iznākumi ir vienādi iespējami. Šī pārlicība, pareiza vai nepareiza, savukārt izriet no pieņēmuma, ka abi kauliņi ir „godīgi” jeb simetriski un ka tātad vienlīdz varbūtīgi ir visi seši katra atsevišķa kauliņa uzkritumi. Šādas simetrijas „blēdīgu” kauliņu gadījumā nebūs, bet pie tā atgriezīsimies nedaudz vēlāk. Pagaidām tātad uzskatīsim, ka kauliņi patiešām simetriski.

Vēl viens pārlicēbā balstīts pieņēmums ir jau pirmā jautājuma (1) sakarā pieminētā abu kauliņu uzkritumu neatkarība: tie var kombinēties katrs ar katru. Pat vairāk, šķiet skaidrs, ka visi seši katra kauliņa uzkritumi nevien ir iespējami, bet arī paliek *vienlīdz iespējami* neatkarīgi no otra kauliņa uzkrituma. Tādejādi, nevienai no iespējamām uzkritumu kombinācijām, t.i., nevienam metiena iznākumam nevajadzētu būt nekādām priekšrocībām vai ierobežojumiem parādīties, salīdzinot ar citiem.

Tiesām, iedomāsimies, ka eksperimentu — divu (šobrīd dažādu) kauliņu mešanu atkārtojam daudz reižu. Protams, mēs neceram, ka pēc 36 metieniem katrs iespējama iznākums būs paguvis īstenoties, taču mēs arī negaidām, ka pusē gadījumu būs uzkrituši abi sešnieki. Tomēr garākā, teiksim, 360 metienu sērijā, visiem iznākumiem vajadzētu būt parādījušamies apmēram vienādi bieži: ap 10 reizēm katram. Ja arī tagad divi sešnieki būs krituši 30 vai, otrādi, 3 reizes, pamatotas būs aizdomas, ka vismaz viens no kauliņiem nav pareizs vai mešana nenotiek godīgi.

Tātad visiem 36 *dažādu* kauliņu metiena iznākumiem ir vienāda iespēja parādīties, un šo iespēju var raksturot ar daļu $\frac{1}{36}$. Bet iespēja izpildīties nosacījumam (a) (ka $s \leq 4$), kuram, kā redzējām iepriekš, der seši iznākumi, ir sešreiz lielāka, un to tad raksturo skaitlis $\frac{6}{36}$ jeb $\frac{1}{6}$, kurš rāda, kādu daļu no visiem iespējamajiem iznākumiem sastāda tie, kuri apmierina nosacījumu. Šo skaitli mēdz saukt par nosacījuma (a) izpildīšanās *varbūtību* (precīzāk, klasisko varbūtību). Līdzīgi, nosacījuma (b) (ka $s = 8$) izpildīšanās varbūtība ir $\frac{5}{36}$.

Tagad ievērosim, ka nosacījumam

(e) uz viena no kauliņiem uzkritis viens, bet uz otra — divi punkti

ir divreiz lielāka varbūtība izpildīties nekā nosacījumam

(f) uz katra kauliņa uzkritis viens punkts,

jo (e) formulējumā nav norādīts, kuras krāsas kauliņa uzmetumam jābūt 1, kuras 2, un tāpēc šim nosacījumam labvēlīgi ir divi metiena iznākumi, kamēr nosacījumam (f) — tikai viens. Īstenībā šis fakts nekādi nav saistīts ar to, kā kauliņi izkrāsoti, tātad arī ar to, ka tie šobrīd ir atšķirīgi. Nosacījumu (e) un (f) izpildīšanās iespējas neizmainās, ja mēs šo atšķirību neņemam vērā vai, teiksim, nepamanām. Turpinot šo domu, nonākam pie secinājuma, kas var šķist negaidīts: (i) gadījumā, kad kauliņi vienādi, iespējamie piecpadsmi metiena iznākumi nebūt nav vienlīdz varbūtīgi! Proti, iznākuma $[i, j]$ varbūtība ir nevis $\frac{1}{21}$, bet gan $\frac{1}{36}$, kad $i = j$, un $\frac{2}{36}$ pretējā gadījumā. Tālāk, saskaitot jau agrāk atrasto četru nosacījumu (a) labvēlīgo iznākumu varbūtības $\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$, dabūjam, ka vienādiem kauliņiem (a) iespēju izpildīties (varbūtību) raksturo nevis skaitlis $\frac{4}{21}$, bet tas pats skaitlis $\frac{6}{36}$, ko izrēķinājām dažādiem

kauliņiem. Citiem vārdiem, nosacījuma (a) varbūtība nav atkarīga no tā, vai kauliņi vienādi, vai nē. (Starp citu, tā nav nejaušība: tāpat ir ar (b) un ar jebkuru citu nosacījumu.)

Tātad Pēterim nav taisnība, un pēdējā aprakstītā spēle ir vienlīdzīga. Mal-dīgs bija pieņēmums, ka vienādu kauliņu gadījumā nevienam metiena iznākumam nav priekšrocību, salīdzinot ar citiem.

Ja kāds no kauliņiem nav pareizs, tad lietotie apsvērumi metiena iznākumu varbūtības skaitliskai novērtēšanai vairs neder.

3. Pirmajā punktā uzdotie jautājumi (2) un (3) par spēļu kauliņiem ir ļoti vienkārši t.s. kombinatorisko uzdevumu piemēri. Kombinatorika ir matemātikas nozare, kas pētī galīgu kopu uzbūvi, attiecības starp šo kopu daļām un dažādu grupējumu jeb *konfigurāciju* veidošanu no to elementiem. Elementārā kombinatorika, kuras sākumus apgūst skolas kursā, nodarbojas ar vienkāršu konfigurāciju eksistences un skaitīšanas jautājumiem; pie tam to vairāk interesē dažādas skaitīšanas metodes nekā pati skaitīšana.

Piemēram, 1. punktā saskārāmies ar skaitļu pāriem, ko veido no kopas $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ izraudzīti divi skaitļi. Atkarībā no nostādnes, skaitļu pāri veidojās nesakārtoti vai sakārtoti (gadījumi (i) un (ii)). Mēs interesējāmies, cik pavisam ir šāda veida konfigurāciju (jautājuma (3) pirmā daļa), vai iespējamās konfigurācijas, kas apmierina kādu nosacījumu (jautājums (1)), un ja ir, tad cik (jautājums (2), arī jautājuma (3) otrā daļa). Skolas kursā tradicionāli aplūkotās konfigurācijas ir *izlases*, kas rodas, pēc zināmiem nosacījumiem izvēloties elementus no galīgas kopas, un arī tādas kopas elementu *izvietojumi*. Vienus un otru kopā dažreiz mēdz saukt par *savienojumiem*.

Atbildes meklējumi uz jautājumiem (4) un (5), kā redzējām 2. punktā, balstās uz 1. punkta kombinatoriskajiem apsvērumiem. Taču jau pats jautājums ietvēra jaunu, citāda rakstura ideju: tas bija jautājums par nenoteiktības kvantitatīvu (jeb skaitlisku) novērtēšanu. Mēs nonācām pie īpaša veida novērtējumiem, ko saucām par attiecīgo nejaušo notikumu varbūtībām. Skolas kursā apskatāmā elementārā varbūtību teorija ļauj pēc vienu notikumu varbūtībām aprēķināt citu notikumu varbūtības.

1.2. Vingrinājumi un uzdevumi

1. Izpētiet jautājumus (1)–(5) tādām izmēģinājumam, kur nevis met divus spēļu kauliņus, bet ņem patvaļīgu kauliņu no pilna domino komplekta, un s nozīmē punktu summu uz paņemtā kauliņa. Kuri apsvērumi un vērtējumi paliek spēkā, kuri mainās, kuri nemaz neparādās, vai parādās kādi jauni?

2. Cik veidos, metot divus spēļu kauliņus, var iegūt katru no iespējamām summām $2, 3, \dots, 12$? Izmantojiet atbildes, lai noteiktu, kāda ir varbūtība izpildīties katram no nosacījumiem $s = 2, s = 3, \dots, s = 12$, kur s , tāpat kā 1. punktā, ir abu uzkrītumu summa. Atkal izpētiet abus gadījumus (i) un (ii). (Skat arī 3.10. piemēru 51. lpp.)

Aprēķiniet varbūtību summu nosacījumiem (saka arī *notikumiem*) $s = 2, s = 3$ un $s = 4$ un salīdziniet to ar pirmās sadaļas 2. punktā atrasto nosacījuma (a) varbūtību $\frac{6}{36}$.

3. Mesta monēta var krist ar „ciparu” (aversu, priekšpusi) vai „ģerboni” (reversu, mugurpusi) uz augšu. Pareizu monētu met 100 un 1000 reizi. Kurā gadījumā ir ticamāks katrs no šādiem novērojumiem:

- a) cipars ir uzkrītis mazāk nekā trijās desmitdaļās visu metienu,
- b) ģerboņa uzkrītumu skaita attiecība pret izdarīto metienu skaitu ir starp 0,47 un 0,53?

4. Metiet monētu 100 reizes un pēc katra metiena reģistrējiet iznākumu. Apzīmēsim ar p ģerboņa uzkrītumu skaita attiecību pret izdarīto metienu skaitu. Aprēķiniet lieluma p vērtību pēc katra metiena un attēlojiet rezultātus grafiski koordinātu sistēmā, kurā uz horizontālās ass atlikts metienu skaits, bet uz vertikālās — iespējamās p vērtības starp 0 un 1. Kas notiek ar p vērtību, izdarīto metienu skaitam pieaugot? Izskaidrojiet pamanīto likumību.

5. Metot reizē divas monētas, interesēsīsimies par šādiem iznākumiem: $[c,c]$ (uzkrītuši abi cipari), $[\acute{g},\acute{g}]$ (abi ģerboņi) un $[c,\acute{g}]$ (cipars un ģerbonis). Novērtējiet to varbūtības. Apmēram cik reizi 30 metienos varētu parādīties katrs no trijiem iznākumiem? Vai ir svarīgi, vai monētas ir vienādas (tātad neatšķiramas), vai dažādas? Salīdziniet savus apsvērumus ar klasesbiedru apsvērumiem. (Parasti pieņem, ka monētas, spēļu kauliņi u.tml. ir pareizi (simetriski), ja nav noteikts kas cits.)

6. Atkārtojiet monētu mešanas eksperimentu no iepriekšējā vingrinājuma 30 reizes un reģistrējiet katra metiena iznākumu. Ievērojiet, cik reizes atkārtosies katrs no trim iznākumiem. Salīdziniet novērojumus ar iepriekš izdarīto prognozi.

2. Izlases

Izlases ir tradicionālas kombinatorikas, daļēji arī varbūtību teorijas konfigurācijas (veidojumi), kuras, no vienas puses, parādās skaitīšanas uzdevumos dažādu iespējamu variantu izvēles rezultātā, bet no otras — pašas tiek skaitītas. Ir vairāki uzdevumu tipi, kurus shematiski var formulēt tā: cik ir no teikta veida izlašu, kas apmierina noteiktu nosacījumu.

Šai nodaļā stāstīts, kas ir izlases un kā tās skaita, kā arī ievestas un pamatotas svarīgākās elementārās kombinatorikas vienādības. Ir arī gan vispārīga veida, gan konkrētu uzdevumu risināšanas piemēri — gan ar pamatīgiem, gan ļoti skopiem paskaidrojumiem.

2.1. Saskaitīšanas un sareizināšanas principi

1. Sāksim ar pavisam vienkāršiem piemēriem.

2.1. PIEMĒRS. Bibliotēkā ir divu angļu detektīvromānu rakstnieku darbi: astoņi A. Konana Doila un desmit A. Kristi sējumi. Tad lasītājs var izvēlēties kādu no 18 sējumiem. ◀

2.2. PIEMĒRS. *Ir zināms, ka ekskursantu grupā, kas dodas ārzemju braucienā, divpadsmit prot angļu, bet septiņi — vācu valodu. Turklāt trīs ir tādi, kas prot abas šīs valodas. Cik īsti ir to, kuri prot vismaz vienu no šīm valodām?*

Protams, ka atbilde „deviņpadsmit”, ko dabū saskaitot divpadsmit ar septiņi, ir nedaudz pārspīlēta: tā būsīm divreiz uzskaitījuši tos trīs, kuri prot abas valodas. Pareizā atbilde ir „sešpadsmit”. ◀

Mēs varam iedomāties, ka katrā no šiem piemēriem ir iespēja izdarīt vienu no divām izvēlēm (A. Konans Doils vai A. Kristi, angļu vai vācu valodas pratējs), un jānosaka cik galu galā ir dažādu iespējamu variantu. Tajos (t.i., piemēros) ir ietverta ideja, kuru vispārīgāk var formulēt šādi.

SASKAITĪŠANAS PRINCIPS: Ja izvēli α var izdarīt k veidos, bet izvēli β — l citos veidos, tad izvēli „ α vai β ” var izdarīt $k + l$ veidos.

Šo principu mēdz saukt arī par *summas* principu. Pievērsīsim tā tekstā uzmanību atrunai 'citos'. Ja plauktā ir četras grāmatas cietos vākos un piecas biezas grāmatas, tad šis princips var arī nederēt, lai noteiktu, cik grāmatu var atrast plauktā (ja tur ir bieza grāmata cietos vākos) — gluži tāpat kā otrajā piemērā.

Līdzīgs princips ir spēkā arī vairāk nekā divām izvēlēm.

2.3. PIEMĒRS. *Veikalā īsi pirms slēgšanas palikuši 7 kukuliši Borodinas maizes, 5 kukuliši saldiskābmaizes, 4 kukuliši klona maizes un 8 baltmaizes batoni. Cik liels ir piedāvājums pircējam, kurš iesteidzas veikalā pēdējā brīdī?*

Tā kā visas četras maizes šķirnes ir dažādas, varam saskaitīt dažādu šķirņu kukulišu skaitu. Tas nozīmē, ka pircējs var dabūt vienu no 24 kukulišiem. ◀

VISPĀRĪGAIS SASKAITĪŠANAS PRINCIPS: Pieņemsim, ka ir jāizdara viena no izvēlēm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 2$). Ja

izvēli α_1 var izdarīt k_1 veidos,

izvēli α_2 var izdarīt k_2 veidos

u.t.t., pie kam nekādām divām no šīm izvēlēm nav kopīgu variantu, tad izvēli „ α_1 vai α_2 , vai \dots , vai α_n ” var izdarīt $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ veidos.

Abi šie principi ir tik dabiski un vienkārši, ka vēlāk parasti tos lietosim bez īpaša atgādinājuma.

2. Tagad apskatīsim piemērus, kas novedīs pie cita principa.

2.4. PIEMĒRS. *Cik ir divciparu naturālu skaitļu?*

Pirmais cipars var būt $1, 2, \dots, 9$, bet otrais bez tam var būt arī nulle. Tātad pirmo ciparu var izraudzīties deviņos, bet otro — desmit veidos, turklāt jebkuram pirmajam ciparam drīkst pierakstīt blakus jebkuru otro ciparu. Tāpēc pavisam ir 90 divciparu skaitļu. ◀

2.5. PIEMĒRS. *Plauktā ir 12 grāmatas. No tām vienu paņem Jānis, pēc tam vēl vienu — Juris. Cik dažādu variantu te iespējams?*

Jānis var sev izvēlēties jebkuru no 12 grāmatām. Jurim palikušo grāmatu kopums, protams, ir atkarīgs no tā, kuru ir paņēmis Jānis. Taču jebkurā gadījumā Juris var sev izvēlēties grāmatu 11 veidos. Tā kā nekādu citādu ierobežojumu nav, atkal drīkstam šos skaitļus sareizināt: tātad ir iespējams 121 variants, kā paņemt no plaukta vienu aiz otras divas grāmatas. ◀

Formulēsim šo sareizināšanas ideju vispārīgāk.

SAREIZINĀŠANAS PRINCIPS: Ja izvēli α var izdarīt k veidos un katrs no tiem pieļauj, ka kādu izvēli β var izdarīt l veidos, tad izvēli „ α un β ” var izdarīt $k \cdot l$ veidos.

Šo principu, kuru dažreiz sauc arī par *reizinājuma* principu, izmantojām jau ievada paragrāfā, konstatējot, ka divu dažādu kauliņu metienam iespējami

36 iznākumi. Atšķirībā no saskaitīšanas principa, šeit izvēlei β nav jābūt ar pilnīgi citiem iznākumiem; var pat divas reizes izdarīt vienu un to pašu izvēli. Vēl viens piemērs tam: ja Juris grāmatu ņem pēc tam, kad Jānis savējo jau atlicis plauktā atpakaļ, tad abas reizes notiek izvēle no vienām un tām pašām 12 grāmatām. Protams, tad ir 144 varianti.

Arī sareizināšanas princips ir vispārināms vairākām izvēlēm. Mēs varam sev jautāt, cik pavisam ir trīsciparu vai septiņciparu skaitļu, un šos ciparus tāpat pa vienam izraudzīties.

VISPĀRĪGAIS SAREIZINĀŠANAS PRINCIPS: Pieņemsim, ka ir jāizdara n izvēles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 2$). Ja izvēli α_1 var izdarīt k_1 veidos, katrs α_1 variants pieļauj, ka izvēli α_2 var izdarīt k_2 veidos, katrs iespējamais izvēles „ α_1 un α_2 ” variants pieļauj, ka izvēli α_3 var izdarīt k_3 veidos u.t.t., tad izvēli „ α_1 un α_2 , un \dots , un α_n ” var izdarīt $k_1 k_2 \dots k_n$ veidos.

Pēc šī principa iznāk, ka pavisam ir $9 \cdot 10 \cdot 10$ jeb 900 trīsciparu skaitļu: no 100 līdz 999, 9000 četrsciparu skaitļu u.t.t. Ja mūs interesē trīsciparu pāra skaitļi, tad te trešais reizinātājs būs ne vairs 10, bet 5. Ja citu aiz citas no tā paša plaukta izņem četras grāmatas, tad veidojas $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ jeb 11880 variantu.

Mēs parasti izlaidīsim apzīmētāju 'vispārīgais' un runāsim vienkārši par saskaitīšanas un reizināšanas principiem arī tad, kad ir vairākas izvēles.

2.2. Kas ir izlase?

1. Kādas kopas elementu izlase rodas, ja vienu vai vairākas reizes no šīs kopas izvēlas pa elementam. Kā noderīgu robežgadījumu pieļauj arī iespēju, ka izvēle nenotiek nevienam reizi — t.i., ka nekas netiek izvēlēts. Izvēļu skaitu, kuras izdara, izlasi veidojot, sauc par radušās izlases *garumu*, bet izvēlētie kopas elementi nosakas izlases *sastāvu* (sk. tālāk). Atkarībā no apstākļiem, kā izlase veidojas, izšķir vairāku paveidu izlases.

Katru izvēlēto elementu pirms nākamās izvēles var „atlikt” vai „neatlikt” kopā atpakaļ (kā, piemēram, grāmatu plauktā). Dažkārt tai vietā ir parocīgāk domāt, ka katrs kopas elements ir pieejams vairākos eksemplāros (kā cipari, rakstot daudzsciparu skaitli) vai attiecīgi tikai vienā (izraugoties basketbola komandas sākuma sastāvu no vairākiem kandidātiem). Var pat vispār tikai norādīt uz kopas elementu; tad „atlikšana atpakaļ” nozīmē, ka vienu un to pašu elementu var norādīt vairākkārt, bet „neatlikšana” — ka tikai vienreiz. Radušos izlasi visos gadījumos sauc par izlasi *ar atkārtojumiem* vai, attiecīgi, — par izlasi *bez atkārtojumiem*.

Dažās situācijās var būt, citās var nebūt svarīgi, kādā kārtībā izlases locekļi tikuši izvēlēti (piem., diktējot telefona numuru un izvēloties no saldumu šķīvja dažas konfektes). Pirmajā gadījumā saka, ka apskatāmā izlase ir *sakārtota*, otrajā — ka tā ir *nesakārtota*. Sakārtotās izlases bieži sauc arī par *variācijām*, bet nesakārtotās — par *kombinācijām*. Pēc tradīcijas, vienkārši ar variāciju (vai kombināciju) saprot izlasi bez atkārtojumiem, tāpēc šo apzīmētāju var atņemt. Taču, ja variācija vai kombinācija ir ar atkārtojumiem, to nevaļag aizmirst piebilst.

Brīdinājums: šie dažādie nosaukumi liecina tikai par izlases veidošanas priekšnosacījumiem, ne par tās sastāvu vai izskatu. Izlasē bez atkārtojumiem visi izvēlētie kopas elementi, protams būs dažādi. Taču arī izlase ar atkārtojumiem var izrādīties tāda, kurā atkārtojumu īstenībā nav: ir bijusi tikai iespēja tādiem parādīties. (Tādējādi jebkura izlase pati par sevi var tikt uzskatīta par izlasi atkārtojumiem!) Līdzīgi, ja sakārtotā izlasē samaina vietām divus vienādus locekļus, paliks tā pati izlase. Jautājums ir cits: vai, ņemot vērā situāciju (uzdevuma noteikumus), drīkstam mainīt locekļus vietām neatkarīgi no tā, kādi tie ir. Ja situācija to neļauj, tad pat izlase, kurā visi locekļi gadījušies vienādi, jāpieskaita pie sakārtotām.

Minētajām pazīmēm dažādi kombinējoties, rodas četri izlašu paveidi:

nesakārtotas izlases bez atkārtojumiem (kombinācijas),
 sakārtotas izlases bez atkārtojumiem (variācijas),
 nesakārtotas izlases ar atkārtojumiem (kombinācijas ar atkārtojumiem),
 sakārtotas izlases ar atkārtojumiem (variācijas ar atkārtojumiem).

Kopu, no kuras izvēlas elementus, sauksim par *pamatkopu*. To vienmēr uzskatīsim par galīgu, un tās elementu skaita apzīmēšanai rezervēsim burtu n (taču šī nav nepārkāpjama noruna). Izlases garumu parasti centīsimies apzīmēt ar r , un šāda garuma izlases no n -elementu kopas sauksim par izlasēm *pa r elementiem no n elementiem* jeb, īsāk, *pa r no n* , vai pat par *r -izlasēm no n* . Dažkārt parocīgi iedomāties, ka pamatkopas elementi ir kaut kā sanumurēti, tā ka var runāt par tās pirmo, otro elementu u.tml. Ciktāl elementu numurus izmanto tikai to (t.i., elementu) atpazīšanai, šī sanumurētība, kā arī konkrēts numuru piekārtojums neiespaido izlašu veidošanu.

Var ierobežoties tikai ar vienreizēju elementa izvēli no pamatkopas: tad radušās izlases garums ir 1. Mēs redzēsim, ka dažreiz ir ērti iedomāties, ka izlases garums r var būt arī 0: tas nozīmē, ka īstenībā mēs neko neizvēlamies. Ir pieņemts uzskatīt, ka tā rodas t.s. *tukšā* izlase bez locekļiem (līdzīga tukšajai kopai) un ka šāda īpatnēja izlase ir viena vienīga. Motivējums tam ir tāds,

ka, pieļaujot tukšo izlasi, dažas kombinatoriskas sakarības iegūst vispārīgāku raksturu.

No otras puses, izlases ar atkārtojumiem var būt neierobežoti garas. Bet izlasei bez atkārtojumiem no n elementiem, protams, vienmēr $r \leq n$.

2.6. PIEMĒRS. Atcerēsimies divus spēļu kauliņus, ar kuriem darbojāties ievadā. Ja kauliņi ir vienādi, tad metiena iznākums $[i, j]$ ir kombinācija ar atkārtojumiem, bet ja tie dažādi, tad iznākums (i, j) ir variācija ar atkārtojumiem no sešu elementu pamatkopas $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ◀

Lietosim kvadrātiekvavas un apaļās iekavas arī garāku izlašu pierakstīšanai. Piem., (a, b, a, c) un (c, b, a, a) nozīmēs divas dažādas sakārtotas 4-izlases no alfabēta mazo burtu kopas, bet $[a, b, a, c]$ — nesakārtotu 4-izlasi ar tiem pašiem locekļiem. Pie tam $[a, b, a, c] = [c, b, a, a]$. Tukšo izlasi var pierakstīt gan kā $()$, gan arī kā $[]$.

2.7. PIEMĒRS. *Veikalā piedāvā triju šķirņu jogurtu: ananāsu, bumbieru un cidoniju. Kā (kādos veidos) var izvēlēties divas kārbas?*

Lietosim burtus A, B, C šo triju jogurta šķirņu apzīmēšanai. Pirms meklēt atbildi uz jautājumu, jācenšas precīzi izprast tā jēgu. Vai pircējs ir ar mieru izraudzīties abas kārbas ar vienas šķirnes jogurtu (piem., vai variants AA ir pieļaujams)? Vai ir svarīgi (skaitot variantus), kādā secībā nosauc pārdevējam abas šķirnes (vai AB un BA ir viens un tas pats „veids”)?

Kā redzams, uzdotais jautājums nav īsti labi formulēts. Lūk, četras iespējamās atbildes atkarībā no pieņemtā precizējuma:

- (a) ja šķirnes drīkst atkārtoties un secība ir svarīga, tad AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC,
- (b) ja šķirnes nedrīkst atkārtoties, bet secība ir svarīga, tad AB, BA, AC, CA, BC, CB,
- (c) ja šķirnes drīkst atkārtoties, bet secība nav svarīga, tad AA, AB, AC, BB, BC, CC,
- (d) ja šķirnes nedrīkst atkārtoties un secība nav svarīga, tad AB, AC, BC.

Tagad ievērosim, ka visos četros gadījumos ir notikušas izvēles no šķirņu kopas $\{A, B, C\}$. Iegūtās izlases ir, attiecīgi, variācijas ar atkārtojumiem, variācijas, kombinācijas ar atkārtojumiem un kombinācijas no 3 elementiem pa 2.

Iespējams, lasītājs sākumā bija noskaņots sagaidīt, ka izvēlētas tiks ne šķirnes, bet kārbas. Mēs tiešām varētu pircējam pavaicāt, vai viņam ir, vai nav vienalga, kuru no visām ananāsu jogurta kārbām viņš dabū. Iepriekš klusciēsot tika pieņemts, ka ir vienalga. Ja tas tā nav, tad par pamatkopu jāņem, piemēram, visu veikalā esošo jogurta kārbu kopa. ◀

2.8. PIEMĒRS. *Seši draugi iegriežas saldējuma kioskā, kurā ir četru veidu saldējums; katrs grib nopirkt pa vienai porcijai. Kāda veida izlase un no kādas kopas te veidojas?*

Acīmredzot, sešas reizes tiks izraudzīta viena no četrām saldējuma šķirnēm. Nevar liegt vairākiem izvēlēties vienu un to pašu šķirni pat tad, ja izvēles iespēju būtu vairāk. Tātad pirkums būs izlase *ar atkārtojumiem* no 4 pa 6. Ja katrs grib dabūt paša izraudzīto šķirni, nevis vienalga, kuru, tad šī izlase jāuzskata par *sakārtotu* (iedomājieties, ka draugi sastājušies rindā), bet ja nē, tad tā ir *nesakārtota*. ◀

2.9. PIEMĒRS. *Desmit cilvēku komitejai jāizrauga savs priekšsēdētājs, sekretārs un kasieris. Kāda izlase ir šis amatpersonu trijnieks?*

Nepietiek tikai nosaukt trīs no komitejas locekļiem: jāzina arī, kuru amatu katrs ieņems. Var, piemēram, norunāt, ka amatpersonas ievēlē minētajā secībā. Ja turklāt, kā dabiski domāt, katrs no desmita var būt tikai vienā amatā, tad amatpersonu trijnieks ir variācija no 10 pa 3. ◀

2.10. PIEMĒRS. *Ieskaitē ir septiņi uzdevumi, no kuriem studentam jāatrisina jebkuri četri. Kādas izlases te rodas?*

Parasti nav svarīgi, kādā secībā uzdevumus risina, un, protams, neko nedod viena uzdevuma vairākkārtēja risināšana. Tātad šeit students īsteno kombināciju no 7 pa 4. ◀

2.11. PIEMĒRS. *No cipariem 2, 3, 4, 5, 6, 7 veido trīsciparu skaitļus. Mūs interesē (a) tie skaitļi, kuros cipari ir augošā secībā, (b) tie, kuros neviens cipars nav mazāks par iepriekšējo, (c) tie, kuros visi cipari dažādi, (d) visi trīsciparu skaitļi.*

(a) gadījumā dažkārt gribas domāt, ka jāreķinās ar sakārtotām izlasēm, jo ir taču jāpanāk augoša ciparu secība katrā apskatāmajā skaitlī. Tomēr tieši tādēļ izvēlēties ciparu secību šeit vairs nevajag; atliek tikai izvēlēties skaitļa trīs ciparus. Piem., ja nosaukti cipari 6, 2, 4, tad viennozīmīgi noteikts skaitlis 246. Tātad šai gadījumā mums ir darīšana ar kombinācijām no 6 pa 3.

(b) Te apsvērumi ir līdzīgi, ar vienīgo atšķirību, ka skaitlim pieļauti arī vienādi cipari; protams, tiem jāatrodas blakus. Tāpēc uzrakstīt vienu šādu skaitli nozīmē ņemt kombināciju ar atkārtojumiem no 6 pa 3. (Atgādinājums: piebilde 'ar atkārtojumiem' nenozīmē, ka atkārtojumiem noteikti jābūt.)

(c) Šoreiz, protams, trīs dažādu ciparu nosaukšana vairs nenosaka skaitli pilnībā, un mums pašiem ir jānorāda arī secība, kādā tie rakstāmi. Te katrs skaitlis jāuztver kā variācija no 6 pa 3.

(d) Kad nu nav nekādu ierobežojumu, mēs drīkstam, spriežot tāpat, kā (c) gadījumā, nosaukt arī vienādus ciparus. Līdz ar to šoreiz mums ir jāveido variācijas ar atkārtojumiem no 6 pa 3. ◀

Piezīmēsim, ka pamatkopas elementu kombinācija (bez atkārtojumiem) nav nekas cits kā tās apakškopa. To pašu pasakot citādi, lai iegūtu kombināciju bez atkārtojumiem, varam tās locekļus ņemt arī visus uzreiz, nevis pa vienam. Tādejādi, kombinācija $[6, 2, 4]$ un kopa $\{2, 4, 6\}$ pēdējā piemērā ir viens un tas pats objekts (bet kombināciju ar atkārtojumiem $[6, 2, 2]$ gan nedrīkst domāt kā kopu $\{6, 2, 2\}$: kopā elementi neatkārtojas). Savukārt, pamatkopas elementu sakārtotu izlasi var iedomāties kā galīga garuma virkni, kuras locekļi pieder pamatkopai. Ārpus kombinatorikas variācijas ar atkārtojumiem pazīstamas ar nosaukumu *korteži*. Arī vektors (pierakstīts kā koordinātu rindiņa) nav nekas cits kā variācija ar atkārtojumiem.

2. Pieminēsim tepat arī permutācijas.

Par kādas kopas elementu *permutāciju* sauc ikvienu tās elementu izvietojumu virknē, kurā katrs kopas elements parādās tieši vienu reizi. Ja tādā izvietojumā pieļauj arī elementu atkārtojumus (un iztrūkumus, domājot, ka elements parādījies 0 reizes), tad saka, ka mums ir *permutācija ar atkārtojumiem*.

Protams, lai varētu izveidot permutāciju ar atkārtojumiem, kurā kāds kopas elements patiešām parādās vairāk nekā vienu reizi, šim elementam jābūt pieejamam vairākos eksemplāros.

Kaut arī šī definīcija it kā neliecina, ka permutācija būtu izlase no kaut kā, būtībā tā ir īpaša apskatāmās kopas elementu variācija, proti, tāda, kurā izlietoti visi kopas elementi. Protams, ikviena permutācija ar atkārtojumiem ir variācija ar atkārtojumiem, un otrādi, t.i., tās ir vienas un tās pašas „konfigurācijas“. Atšķiras tikai mūsu skatpunkts uz vienām un otrām (izlases vai izvietojumi).

2.12. PIEMĒRS. No vārdu 'kartupelis', 'saskaitīts', 'neieiesim' burtiem, tos pārstatot, darina jaunus vārdus.

Te vārdā 'kartupelis' visi burti ir dažādi, tāpēc no tā burtiem veidojas permutācijas bez atkārtojumiem. Pie tam visas šo burtu permutācijas tā ir iegūstamas (nevajag aizmirst, ka pats sākuma vārds arī ir viena no tādām permutācijām). Pārējos divos gadījumos veidojas permutācijas ar dažu burtu atkārtojumiem, taču ne visas. Tā, no otrā vārda burtiem a, i, k, ī, s, t nevar iegūt nevienu permutāciju, kurā burts 'i' parādītos vairāk nekā vienu reizi, bet 's' — mazāk nekā trīs reizes. Citas permutācijas ar atkārtojumiem varētu iegūt, ja atteiktos no ierobežojuma, ka jaunus vārdus darina, vienīgi burtus pārstatot. ◀

2.3. Kombinatorikas pamatskaitļi

1. Mēs interesēsimies par to, cik pavisam ir noteikta veida izlašu no fiksētas pamatkopas. Ir skaidrs, ka šeit nekādu lomu nespēlē to priekšmetu daba, kuri veido doto kopu: izlašu skaits ir atkarīgs tikai no pamatkopas elementu skaita n , izlases garuma r un, protams, no tā, kuras no četrējādām izlasēm skaitām. Ievedīsim šādus apzīmējumus:

- C_n^r — kombināciju skaits no n (elementiem) pa r (elementiem),
- A_n^r — variāciju skaits no n pa r ,
- \bar{C}_n^r — kombināciju ar atkārtojumiem skaits no n pa r ,
- \bar{A}_n^r — variāciju ar atkārtojumiem skaits no n pa r ,
- P_n — permutāciju skaits no n ;

šī punkta beigās parādīsies vēl viens.

Runājot par izlasēm ar atkārtojumiem, dažkārt jāinteresējas par to, cik ir izlašu ar iepriekš norādītu sastāvu. Intuitīvi sastāvs ir izlasē ietilpstošo pamatkopas elementu kopums. Taču ja mums ir divas vienāda garuma izlases *ar atkārtojumiem*, kurās ietilpst vieni un tie paši pamatkopas elementi, bet kādi no tiem — atšķirīgu skaitu reižu vienā un otrā, tad tādas izlases uzskata par dažādām. Tāpēc saka arī, ka tām ir dažādi sastāvi. Ja elementi pamatkopā ir sanumurēti, tad izlases sastāvu ērti raksturot ar rindiņu (r_1, r_2, \dots, r_n) , kur i -ais loceklis r_i ir skaitlis, kurš rāda, cik reižu izlasē parādās kopas i -ais elements. Tādējādi, izlasei bez atkārtojumiem šai rindiņā parādās tikai nulles un vieninieki. Pārnumurējot kopas elementus, šai rindiņā locekļi tikai samainās vietām.

2.13. PIEMĒRS. Iepriekšējā piemērā vārdu 'saskaitīts' iedomājāmajies kā izlasi ar atkārtojumiem no sešelementu burtu kopas. Tās sastāvs ir $(2, 1, 1, 1, 3, 2)$, ja burtus uzskaitām, kā tas darīts minētajā piemērā, alfabēta secībā: a i ī k s t. Ja tos pašus burtus uzskaitītu tādā secībā, kā tie parādās sākumvārdā (s a k i t ī), tad sastāvs būtu pierakstāms tā: $(3, 2, 1, 1, 2, 1)$. Pārstatot šai vārdā burtus, var iegūt tās un tikai tās permutācijas ar atkārtojumiem, kurām ir šis sastāvs. Izlases 'neieiesim' sastāvs ir $(3, 3, 1, 1, 1)$. ◀

Saprotams, ir tikai viena nesakārtota izlase ar atkārtojumiem, bet fiksētu sastāvu. To sakārtoto izlašu — permutāciju skaitu, kurām ir iepriekš noteikts sastāvs, apzīmē ar simbolu P , aiz kura iekavās norāda pašu sastāvu. Pie tam parasti atmet indeksu un arī svītru virs simbola. Protams, iepriekšējā piemēra

situācijā abi skaitļi $P(2, 1, 1, 1, 3, 2)$ un $P(3, 2, 1, 1, 2, 1)$ nozīmē vienu un to pašu — to vārdu skaitu, kurus var iegūt, pārstatot burtus vārdā 'saskaitīts'.

Tātad mums parādās vēl viens apzīmējums:

- $P(r_1, r_2, \dots, r_n)$ — permutāciju ar atkārtojumiem un sastāvu (r_1, r_2, \dots, r_n) skaits.

Dažreiz ērtības labad pie P tomēr atstāj indeksu, kurš rāda permutācijas garumu: $P_{10}(2, 1, 1, 1, 3, 2)$. Tad jāievēro, ka pieraksts $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ir pareizs vienīgi tad, kad $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$. Acīmredzot, $P_4(1, 1, 1, 1) = P_4$.

2. Aprakstītos visu sešu veidu skaitļus saucim par kombinatorikas *pamatskaitļiem*. Jāpasvītro, ka literatūrā (it īpaši angļu valodā) lieto arī citus to apzīmējumus. Iepazīsimies ar kārtulām pamatskaitļu aprēķināšanai, kā arī ar dažām vienkāršām sakarībām, kas saista savā starpā dažāda nosaukuma pamatskaitļus vai arī viena nosaukuma pamatskaitļus ar dažādiem indeksiem.

Vispirms daži pavisam vienkārši fakti.

$$\text{K1: } C_n^0 = A_n^0 = \bar{C}_n^0 = \bar{A}_n^0 = 1,$$

$$\text{K2: } C_n^1 = A_n^1 = \bar{C}_n^1 = \bar{A}_n^1 = n.$$

K1 seko no tā, ka mums ir tikai viena tukšā izlase.

2.14. PIEMĒRS. *Uz lentas, kas sadalīta r rūtiņās, katrā rūtiņā jāieraksta viens no dotiem n burtiem. Cik veidos var aizpildīt tādu lentu (jeb — cik daudz dažādi aizpildītu lentu var iegūt, ja sākumā ir sagatavots pietiekami liels skaits tukšu lentu), ja*

(i) *nav nekādu ierobežojumu,*

(ii) *katrā rūtiņā jābūt citādam burtam (un tad $r \leq n$)?*

Aizpildīsim lentu, kā to parasti dara, pakāpeniski no kreisās puses uz labo. Kas un kurā brīdī tad būs jāizvēlas?

(i) gadījumā mums pie katras rūtiņas jāpadomā, kuru no n burtiem šai rūtiņā rakstīt. Tas jādara r reizes, tātad radīsies r -izlases no n . Protams, ir svarīgi, kuru burtu izvēlēsimies kā pirmo, kuru kā otro u.t.t., tā ka izlases ir sakārtotas. Tās ir ar atkārtojumiem, jo nekas neliedz rakstīt vienu un to pašu burtu vairākās rūtiņās. Tātad lentu var aizpildīt \bar{A}_n^r veidos.

(ii) gadījumā vienīgā atšķirība ir, ka katrs burts lietojams tikai vienreiz, tāpēc šoreiz būs variācijas bez atkārtojumiem.

PIRMĀ ATBILDE: (i) \bar{A}_n^r , (ii) A_n^r .

Bet (i) gadījumā mēs varam savus apsvērumus papildināt šādi. Pirmās rūtiņas aizpildīšanai varam izraudzīties jebkuru no n burtiem. Neatkarīgi no tā, kuru burtu tur ierakstīsim, tāda pati izvēle jāizdara arī otrajai, tad trešajai rūtiņai u.t.t. Acīmredzot, pirmās divas rūtiņas var aizpildīt $n \cdot n$ veidos, pirmās trīs — $n \cdot n \cdot n$ veidos u.t.t. (sareizināšanas princips!). Lenta būs aizpildīta, kad būsīm izdarījuši r tādas izvēles. Tātad ir $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (pavisam r reizinātāju) jeb n^r variantu tukšas lentas aizpildīšanai.

(ii) gadījumā katrai nākamai rūtiņai izvēle būs par vienu burtu mazāka, arī neatkarīgi no tā, kādi burti ir gadījušies pirmajās rūtiņās. Reizinot tāpat kā iepriekš, iegūstam, ka šoreiz ir pavisam $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$ variantu (atkal r reizinātāju!).

OTRĀ ATBILDE: (i) n^r , (ii) $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$.

Kā izskaidrot to, ka ir divas, turklāt pēc skata tik atšķirīgas atbildes? Īstenībā kā (i), tā arī (ii) gadījumā esam vienus un tos pašus objektus (visos iespējamajos veidos aizpildītas lentas, tikai (ii) gadījumā ar noteikto ierobežojumu) saskaitījuši divejādi. Tas nozīmē, ka attiecīgajiem iznākumiem, lai kā arī tie nebūtu aprakstīti, jābūt skaitliski vienādiem. Tātad, kā secinājumu iegūstam:

$$\text{K3: } \bar{A}_n^r = n^r,$$

$$\text{K4: } A_n^r = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Piezīme. Apsvērumiem, ar kuriem ieguvām abas atbildes, ir jēga tikai ar $r > 0$. Taču, ņemot vērā K1, vienādības K3 un K4 ir derīgas arī ar $r = 0$. K4 gadījumā gan vēl jāpiebilst, ka reizinājumu, kurā reizinātāju skaits izrādās vienāds ar 0, parasti pieņem vienādu ar 1.

Atgādinām, ka ar $n!$ ir pieņemts apzīmēt pirmo n naturālo skaitļu reizinājumu. Šo reizinājumu sauc par skaitļa n faktoriālu. Pieņem arī, ka $0! = 1$ (skat. iepriekšējo rindkopu).

Bet turpināsim analizēt mūsu piemēru. Izskatīsim (ii) punktu atsevišķi divos apakšgadījumos: (a) kad $r = n$, (b) kad $r < n$.

(a) apakšgadījumā katrs burts būs ierakstīts tieši vienā rūtiņā, tā ka īstenībā būsīm ieguvuši visas šo burtu permutācijas: katru uz savas aizpildītās lentas. Tādejādi (skat. pirmo atbildi)

$$\text{K5: } P_n = A_n^n.$$

Tas gan nav pārsteidzoši: mēs jau redzējām, ka kādas n -elementu kopas elementu permutācijas un n -variācijas ir vieni un tie paši objekti. Tāpēc tām patiešām jābūt vienādā skaitā.

Ņemot vērā K5, no K4 dabūjam

$$\text{K6: } P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

(b) apakšgadījumā iedomāsimies, ka katru aizpildīto lentu ar r rūtiņām gribam pagarināt tā, lai pagarinājumā varētu sarakstīt vēl atlikušos burtus — tāpat bez atkārtošanās. To katrai lentai ir vienāds skaits, proti, $n-r$, un tos var izkārtot P_{n-r} veidos. Tāpēc katra aizpildītā r rūtiņu lenta jāpavairo P_{n-r} eksemplāros, un tad ikvienam no tiem var pielīmēt galā vēl aizpildītu gabalu ar $n-r$ dažādi aizpildītām rūtiņām. Jau agrāk noskaidrojām, ka aizpildīto lentu ar r rūtiņām ir A_n^r ; katrai no tām iespējami P_{n-r} pagarinājumi, tāpēc pēc sareizināšanas principa mums tagad būs pavisam $A_n^r P_{n-r}$ aizpildītas lentas ar n rūtiņām.

Uz katras jaunās lentas uzrakstīti visi n burti, katrs tieši vienu reizi. Ir skaidrs, ka nebūs divu vienādu lentu un ka jebkuru aizpildītu n rūtiņu lentu var iegūt aprakstītajā veidā. Tāpēc esam dabūjuši, ka

$$\text{K7: } P_n = A_n^r P_{n-r},$$

$$\text{K8: } A_n^r = \frac{P_n}{P_{n-r}}.$$

Mēs (ii) gadījumā varam rīkoties vēl savādāk: aizpildīsim lentu divos soļos. Pirms sākt aizpildīt lentu, izlemsim iepriekš, kuri būs tie r burti no visiem n , kurus gribēsim lietot. Burtu nosaukšanas secība te nespēlē lomu, un, protams, nav vajadzības kādu burtu nosaukt vairākas reizes; tātad šo izvēli var izdarīt C_n^r veidos. Tālāk atliek izraudzītos burtus sarindot kaut kādā secībā un tad šai pašā secībā sarakstīt lentas rūtiņas. Katrs sakārtojums ir viena permutācija, tāpēc tādu sakārtošanu var izdarīt P_r veidos. Izdarot abas izvēles, viennozīmīgi dabūjam aizpildītu lentu, pie tam katru tikai vienreiz, un ikvienu aizpildītu lentu šādi var iegūt. Kopā šīs divas izvēles var izdarīt $C_n^r P_r$ veidos (reizināšanas princips!), un tik tad arī ir (ii) gadījumā vajadzīgo lentu.

Salīdzinot to ar pašu pirmo atbildi un pēc tam ņemot vērā arī K8, K4 un K6, dabūjam secinājumus

$$\text{K9: } A_n^r = C_n^r P_r,$$

$$\text{K10: } C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{P_n}{P_r P_{n-r}},$$

$$\text{K11: } C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

No K10 izriet arī, ka

$$\text{K12: } C_n^r = C_n^{n-r}. \quad 912$$

Atzīmēsim, ka skaitlis C_n^{n-r} rāda cik veidos no n burtiem var izraudzīties tos $n-r$, kuri, otrādi, *netiks* lietoti lentas aizpildīšanai. Tā kā variantu skaita ziņā ir vienalga, vai atlasīt tos burtus, kurus lietosim, vai tos, kurus nelietosim, vienādība K12 ir dabiska, un īstenībā tā iegūstama arī tieši — bez K10 starpniecības. ◀

2.1. VINGRINĀJUMS. K8 (un pēc tam K7) var iegūt arī, lietojot aprēķināšanas formulas K4 un K6. Kādēļ K9 nedrīkst pierādīt tāpat, izmantojot K4, K6 un K11:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot r! = C_n^r P_r \quad ? \quad \blacktriangleleft$$

Mums pagaidām nav sakarību, kurās piedalītos pamatskaitļi \bar{C}_n^r ; nav arī attiecīgās aprēķināšanas formulas. Tās iegūsim mazliet vēlāk — nākamā punkta beigās. Pēc tam pievērsīsimies permutāciju ar atkārtojumiem skaitīšanai.

2.2. VINGRINĀJUMS. Ņemsim par pamatkopu kopu $X = \{a, b, c\}$. Lietojot 11. lpp. pēc 2.6. piemēra ievestos apzīmējumus, izrakstīt

- (i) visas kombinācijas no X elementiem,
- (ii) visas variācijas no X elementiem,
- (iii) visas r -variācijas ar atkārtojumiem no X elementiem ar $r \leq 3$.

Lietojiet K11, K4 un K3, lai pārbaudītu, ka izrakstītas visas vajadzīgās izlases. ◀

3. Tagad izskatīsim vairākus piemēra uzdevumus, kuri rāda, ka pamatskaitļi parādās situācijās, kur vismaz pirmajā brīdī nekādas izlases nav saskatāmas. Jau redzējām, un elementārajā kombinatorikā tas gadās bieži, ka vienu un to pašu skaitīšanas uzdevumu var risināt dažādi, un ne katrtreiz kāds viens paņēmieni ir jūtami labāks par citiem. Mūsu nolūks, tālākos piemērus analizējot, būs ne tikai (un ne tik daudz) noskaidrot atbildes, bet izsekot, kā var līdz atbildei tikt.

Kombinatoriskos skaitīšanas uzdevumos bieži vien ir pagrūti uzreiz saskatīt, ko īsti un kā sākt skaitīt. Tad var noderēt šāds ieteikums: jāiedomājas, ka nepieciešams pašam „saražot” visas vajadzīgās konfigurācijas. Lai kaut ko neizlaistu, vēlams izdomāt kādu sistemātisku paņēmieni, kā attiecīgā veida konfigurācijas konstruēt, un varbūt pat dažas no tām sastādīt. Parasti pa ceļam

nākas izdarīt vienu, divas vai vairākas izvēles (to jau redzējām iepriekšējā piemērā). Nepieciešams tās apzināties, kā arī fiksēt, cik veidos katru šo izvēli var izdarīt. Pēc tam jāsaprot, kā šīs izvēles saistītas cita ar citu, lai izlemtu, kā no iegūtajiem variantu skaitiem „samontēt” galīgo atbildi. Bieži vien tam nolūkam pietiek ar mums jau pazīstamajiem saskaitīšanas un sareizināšanas principiem.

Pavērosim vēl, kā šie visai aptuvenie norādījumi strādā. Tiesa gan, šai punktā piemēri būs vienkārši: skaitāmās konfigurācijas būs tikai izlases. Tad mums jātiek skaidrībā par četrām lietām: no kādas kopas jāizvēlas izlases locekļi (un cik elementu šai kopā), cik reizes jāizvēlas pa elementam (kāds ir izlases garums), vai situācija pieļauj (varbūt pat paredz) atkārtojumus, vai ir svarīgi, kādā secībā elementus izvēlas.

2.15. PIEMĒRS. *Cik veidos m vienādas bumbiņas var izvietot n dažādās urnās, ja*

- (i) *nav nekādu ierobežojumu,*
- (ii) *katrā urnā drīkst būt ne vairāk kā viena bumbiņa,*
- (iii) *neviena urna nedrīkst palikt tukša.*

Vispirms izšķirsimies, vai izvēlēties bumbiņas, urnas vai, varbūt, gan vienu, gan otru. Tā kā bumbiņas ir vienādas, divi to izvietojumi var atšķirties tikai ar to, kurās urnās bumbiņas nokļuvušas. Visai dabiski ir domāt, ka ņemam bumbiņas pa vienai (tur nekāda īpaša izvēlēšanās nav vajadzīga: vienlīdz laba jebkura bumbiņa) un aiznesam katru no tām uz kādu urnu. Katru bumbiņu nesot, ir jāizšķiras, uz kuru urnu to nest; tātad veidosies m -izlases no urnu kopas. Nav svarīgi, kādā secībā urnas tiek apstaigātas, tāpēc šīs izlases ir nesakārtotas. (i) gadījumā pie katras urnas atļauts iet vairākkārt, bet (ii) gadījumā — nē, tāpēc attiecīgās atbildes ir \bar{C}_n^m un C_n^m . Arī (iii) gadījumā būs kombinācijas ar atkārtojumiem, taču, kā saprotams, mazāk. Lai nodrošinātu nosacījuma izpildi, rīkojamies tā: vispirms katrā urnā ieliekam vienu bumbiņu. Ja $m \geq n$, tāds izvietojums iespējams viens vienīgs, tā ka šeit nav izvēles un nav arī ko skaitīt (ja $m < n$, acīmredzama atbilde ir uz uzdoto jautājumu ir 0). Mums paliek vēl $m - n$ bumbiņas, ko tagad varam izvietot urnās pilnīgi brīvi kā (i) gadījumā. To var izdarīt \bar{C}_n^{m-n} veidos, un šī tad arī ir galīgā atbilde.

ATBILDES: (i) \bar{C}_n^m , (ii) C_n^m , (iii) \bar{C}_n^{m-n} . ◀

2.16. PIEMĒRS. *Tas pats, ja visas bumbiņas dažādās.*

Pārdomāsim, kur rodas kādas atšķirības no iepriekšējiem spriedumiem. Būtiska atšķirība tagad ir tā, ka šoreiz ir svarīgi ne tikai cik, bet arī kuras bumbiņas nokļūst katrā urnā. Pirmā brīdī var likties: tas nozīmē, ka tagad

pirms iešanas pie kādas urnas iepriekš ir arī jāizvēlas, kuru no palikušajām bumbiņām ņemt līdzī. No šādas papildizvēlēšanās var izvairīties, ja pirms katra jauna bumbiņu izvietojuma seansa tās sarindo kaut kādā iepriekš izlemtā (tātad — katreiz vienā un tai pašā) secībā un tad ņem tās pēc kārtas. Līdz ar to tagad ir svarīga urnu izvēles secība, un tātad šoreiz atbildes gadījumiem (i) un (ii) ir \bar{A}_n^m un A_n^m .

Bet apspriedīsim vēl vienu momentu: vai nupat netikām aizmirsuši, ka bumbiņas sarindojam vienā noteiktā secībā, kuru tagad vajadzētu visos iespējamajos veidos mainīt? Nē, to darīt nevajag! Ir svarīgi saprast, lūk, ko: ja uzskaitījām *visus* izvietojumus, kurus dabū, uzsākot ar norunāto sarindojumu, tad nevienam vēl nebijušu izvietojumu vairs neiegūsim, uzsākot ar kādu citu sarindojumu. Tas pats citiem vārdiem: jebkuru izvietojumu, kas iegūts, esot vienam sarindojumam, agrāk vai vēlāk var iegūt arī, esot jebkuram citam (pārdomājiet, kapēc), un tālab nav svarīgi, kā bumbiņas tika sarindotas.

Viss teiktais, protams, jāpatur prātā, apdomājot arī (iii). Bet, kad bumbiņas dažādas, vairs nav vienalga, ne tas, kuras n no tām paņemam pirmās, ne arī tas, kurā urnā katra no tām nokļūst: samainot vietām jebkuras divas bumbiņas no dažādām urnām, nonāksim pie cita izvietojuma. Tas liek domāt, ka, lai iegūtu vienu prasīto visu m bumbiņu izvietojumu, mums jāizdara viena aiz otras trīs izvēles: jāizšķiras, kuras n bumbiņas ņemt vispirms, jāizlemj, kādā secībā tās ielikt urnās, un jāizvēlas viens patvaļīgs atlikušo bumbiņu izvietojums. To var izdarīt attiecīgi C_m^n , P_n un \bar{A}_n^{m-n} veidos; pēc sareizināšanas principa (pārlicinieties, ka tas tiešām ir te piemērojams) galīgā atbilde tad būtu $C_m^n P_n \bar{A}_n^{m-n}$.

Diemžēl šī dabiskā ideja nav gluži pareiza, un tāpēc neder arī iegūtā atbilde. Mēs nepamanījām šādu būtisku apstākli. Vienādu bumbiņu gadījumā, kā tas bija iepriekšējā piemērā, bija vienalga, kuras ir tās bumbiņas, kuras pa vienai katrā urnā izvietojam vispirms. Šoreiz, kad visas bumbiņas dažādas, mēs nevaram rīkoties tik bezrūpīgi. Iedomāsimies vienkāršības labad, ka mums ir piecas sanumurētas bumbiņas b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 un trīs sanumurētas urnas U_1, U_2, U_3 , t.i., $m = 5$ un $n = 3$. Pieņemsim, ka vispirms liekam b_1 urnā U_1 , b_2 urnā U_2 un b_3 urnā U_3 . Tad vēl ieliksīm b_4 urnā U_2 un b_5 urnā U_1 . Pieņemsim, tālāk, ka nākošajā reizē nolemjam vispirms izvietot urnās bumbiņas b_3, b_4 un b_5 ; konkrēti, b_5 pirmajā, b_4 otrajā, bet b_3 — trešajā urnā. Pēc tam vēl b_1 varētu nokļūt pirmajā, bet b_2 — otrajā urnā. Var domāt, ka jau realizēti divi prasītie bumbiņu izvietojumi (atbilstoši iepriekšējā rindkopā aprakstītajam rīcības plānam). Taču ieskatoties uzmanīgāk, redzam, ka esam divejādi ieguvuši, un līdz ar to divreiz uzskaitījuši vienu un to pašu izvietojumu! (Pārdomājiet, kā vēl var nonākt pie tā paša izvietojuma.)

Neiedziļinoties vairāk, atzīmēsim, ka dažādu bumbiņu gadījumā ierobežojums (iii) padara uzdevumu visai sarežģītu, un atbilde vairs nav ērti izsakāma

ar mums pazīstamajiem pamatskaitļiem.

ATBILDE: (i) \bar{A}_n^m , (ii) A_n^m , (iii) paliek neatbildēts. ◀

Šais divos piemēros atbilžu meklēšanas pamatideja bija tāda, ka bumbiņas ņēmām pēc kārtas, likām tās urnās, un gandrīz visas izdarītās izvēles bija saistītas ar izšķiršanos, kurā urnā likt kārtējo bumbiņu. Iespējams, ka lasītājam ienāca prātā kāda citāda ideja — tādas varētu būt pat vairākas. Izmēģināsim vēl vienu. Pa ceļam atklāsim vēl dažas sakarības starp pamatskaitļiem, kurās piedalās kombinācijas ar atkārtojumiem.

2.17. PIEMĒRS. Atgriezīsimies pie 2.15. piemērā pētītā uzdevuma 19. lpp. Iedomāsimies, ka bumbiņas saliktas vienā rindā un mēs, sākot no rindas sākuma, gribam tās sadalīt n grupās: pēc tam pirmās grupas bumbiņas saliksim pirmajā urnā, otrās grupas bumbiņas otrajā urnā u.t.t. Sadalīšanu īstenosim, starp vienas grupas pēdējo bumbiņu un nākamās grupas pirmo bumbiņu ieliekot kādu atdalītāju, teiksim, zīmuli. (Tam nolūkam jā sagatavo $n - 1$ zīmulis; tos visus varam uzskatīt par vienādiem.) Protams, dažas urnas (un līdz ar to arī attiecīgās grupas) drīkst būt tukšas — lai to panāktu, dažviet divi vai vairāki zīmuļi jā noliek blakus. Pašā rindas sākumā nolikts zīmulis nozīmēs, ka tukša ir pirmā grupa, bet pašās beigās nolikts — ka tukša ir pēdējā grupa.

(i) gadījumā mēs tagad savu jautājumu varam formulēt tā: cik veidos m bumbiņu rindā bez kādiem ierobežojumiem var salikt $n - 1$ zīmuli. Pavisam mūsu izvēlei ir $m + 1$ vieta, kur katru zīmuli var ielikt (rindas sākums, beigas, kā arī $m - 1$ starpa starp blakus esošām bumbiņām), tātad būs $(n - 1)$ -izlases no $m + 1$ vietām. Nav svarīgi, kādā secībā vietas zīmuļiem izraugās: mūs interesē tikai, kur tie būs salikti, tāpēc izlases būs nesakārtotas. Pie tam katrā vietā drīkst būt vairāki, pat visi zīmuļi, tāpēc izlases būs ar atkārtojumiem. Kopsavelkot, ir \bar{C}_{m+1}^{m-1} dažādu sadalījumu bumbiņu rindai, tātad arī dažādu izvietojumu urnās.

(ii) gadījumā nāk klāt nosacījums, ka neviena atstarpe starp bumbiņām nedrīkst palikt tukša. To nodrošināsim ar mums jau zināmo paņēmieni: vispirms ieliksīm katrā atstarpē pa zīmuli; atlikušos zīmuļus var brīvi izvietot pa visām $m + 1$ vietām tāpat, kā to tikko darījām (i) gadījumā ar visiem zīmuļiem. Pirmā salikšana ir bez variantiem, t.i., ir izdarāma vienā vienīgā veidā, toties otrā izdarāma $\bar{C}_{m+1}^{(n-1)-(m-1)}$ jeb \bar{C}_{m+1}^{n-m} veidos, un tā ir arī galīgā atbilde.

(iii) gadījumā zīmuļi liekami tikai atstarpēs starp bumbiņām (ne rindas sākumā un ne beigās), turklāt tikai pa vienam. Gan ne katrā atstarpē zīmulis noteikti jāieliek. Atstarpju ir $m - 1$, no tām jāizraugās $n - 1$ (tik mums ir zīmuļi). Izraudzīšanās secība nav svarīga, un nevienu atstarpi neizvēlamies vairāk kā vienreiz. Tātad iespējamo variantu skaits ir C_{m-1}^{n-1} .

ATBILDE: (i) \bar{C}_{m+1}^{m-1} , (ii) \bar{C}_{m+1}^{n-m} , (iii) C_{m-1}^{n-1} . ◀

Ko varam secināt, salīdzinot šo atbildi ar iepriekš iegūto? Tā kā abas reizes skaitīti vieni un tie paši objekti, katrā no trim gadījumiem iegūtajām atbildēm ir jābūt vienādām. Lai pielāgotos sakarībās K1–K12 lietotajiem apzīmējumiem, vienādībās K13 un K14, ko dod (i) un (ii), rakstīsim m vietā r . Vienādība, ko dabū (iii) gadījumā nav īpaši interesanta, un to pat neizrakstīsim. Bet K15 izriet no K14 (ņemot n vietā $n + r - 1$) un K13; tālāk ņemta vērā arī K12. K16 dabūta ar K11.

$$\text{K13: } \bar{C}_n^r = \bar{C}_{r+1}^{n-1},$$

$$\text{K14: } C_n^r = \bar{C}_{r+1}^{n-r},$$

$$\text{K15: } \bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1},$$

$$\text{K16: } \bar{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

2.3. VINGRINĀJUMS. Turpinot 2.2. vingrinājumu no 18. lpp., izrakstiet visas r -kombinācijas ar atkārtojumiem no kopas $\{a, b, c\}$ elementiem ar $r \leq 4$. Lietojiet K16, lai pārbaudītu, vai izrakstītas visas vajadzīgās izlases. ◀

2.4. VINGRINĀJUMS. Pārdomājiet, kāpēc 2.17. piemērā izmantoto skaitīšanas paņēmienu nevar ērti pielāgot 2.16. piemēra uzdevumam. Ņemiet vērā, ka nav svarīgi, kā bumbiņas izvietotas urnas iekšienē. ◀

4. Šajā punktā runāsim par permutācijām ar atkārtojumiem.

2.18. PIEMĒRS. Turpinot piemēru 2.14, noskaidrosim, cik veidos tukšu lentu var aizpildīt, ja noteikts, ka pirmajam burtam jābūt rakstītam r_1 reizi, otrajam — r_2 reizes u.t.t. Protams, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Šoreiz nav lietderīgi mēģināt aizpildīt rūtiņas pēc kārtas: tāda aizpildīšanas gaita noteikto ierobežojumu dēļ izrādās grūti pārskatāma. Tai vietā lietosim citu ideju: vispirms izlemsim, kurās rūtiņās ierakstīt pirmo burtu, pēc tam — kurās otro u.t.t., un saskaitīsim, cik veidos katru no šīm izvēlēm varam izpildīt. Pēc sareizināšanas principa, visu iegūto skaitu reizinājums rādīs, cik veidos aizpildīta visa lenta.

Pirmo reizi mums jāizvēlas r_1 rūtiņa no r . Protams, tām jābūt dažādām, jo nevienā rūtiņā nerakstām vairākus burtus. To izraudzīšanās (t.i., aizpildīšanas) secība nespēlē lomu. Tātad pirmajam burtam ir $C_r^{r_1}$ iespējas, kā to r_1 reizi uzrakstīt uz lentas. Otrajam burtam palikušas vairs $r - r_1$ rūtiņas. Spriežot tāpat kā tikko darījām, noskaidrojam, ka otrajam burtam ir $C_{r-r_1}^{r_2}$ iespējas. Trešajam to būs $C_{r-r_1-r_2}^{r_3}$, ceturtajam — $C_{r-r_1-r_2-r_3}^{r_4}$ u.t.t.

Uzmanīgāk pārdomāsim, cik veidos var atrast vietas pēdējam — n -am burtam. Turpinot iepriekšējā rindkopā darīto, atradīsim skaitli

$$C_{r-r_1-r_2-\dots-r_{n-1}}^{r_n}$$

Taču spriežot citādi, pēdējam burtam nebūs nekā ko izvēlēties: to nāksies ierakstīt atlikušajās vietās, tātad vienā vienīgā veidā! Tomēr te nav nekādas pretrunas: ievērosim, ka $r-r_1-r_2-\dots-r_{n-1}=r_n$ un atcerēsimies, ka $C_k^k=1$ ikvienam k .

ATBILDE: $C_r^{r_1}C_{r-r_1}^{r_2}C_{r-r_1-r_2}^{r_3}\dots C_{r-r_1-r_2-\dots-r_{n-1}}^{r_n}$.

Ievērosim, ka jebkurš prasītais lentas aizpildījums nav nekas cits kā do to burtu permutācija ar atkārtojumiem, proti, ar sastāvu (r_1, r_2, \dots, r_n) . Tāpēc esam atklājuši vēl vienu vienādību:

$$\text{K17: } P(r_1, r_2, \dots, r_n) = C_r^{r_1}C_{r-r_1}^{r_2}C_{r-r_1-r_2}^{r_3}\dots C_{r-r_1-r_2-\dots-r_{n-1}}^{r_n} \quad \blacktriangleleft$$

Tagad nedaudz izmainīsim „spēles noteikumus”.

2.19. PIEMĒRS. *Iedomāsimies, ka mums ir saliekamā ābece n burtiem, pie kam pirmajam burtam ābecē ir r_1 kartīte, otrajam — r_2 kartītes, u.t.t.; pavisam kopā r kartītes.*

- (i) *Cik veidos šīs kartītes var salikt vienā rindā?*
- (ii) *Cik veidos to var izdarīt, ja kartītes ar vienu un to pašu burtu nešķiro?*

Acīmredzama atbilde uz pirmo jautājumu ir P_r . Atbildot uz otro, atkal varam domāt, ka prasītais izvietojums ir permutācija ar atkārtojumiem no n alfabēta burtiem ar iepriekš noteiktu sastāvu (r_1, r_2, \dots, r_n) . To skaits ir $P(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Taču iedomāsimies, ka otrajā gadījumā esam izlēmuši iegūtajos izvietojumos kartītes ar vienādiem burtiem tomēr uzskatīt par dažādām un ka tātad, samainot tādas kartītes vietām, iegūstam citu izvietojumu. Cik tādu būs pavisam?

No vienas puses, šādā ceļā iegūstam (i) jautājumam vajadzīgos izvietojumus — visus, un katru tieši vienu reizi. No otras — kartītes ar pirmo alfabēta burtu var samainīt vietām P_{r_1} veidos, kartītes ar otro burtu — P_{r_2} veidos u.t.t. Pēc sareizināšanas principa, katrs no (ii) gadījuma $P(r_1, r_2, \dots, r_n)$ izvietojumiem tātad dod $P_{r_1}P_{r_2}\dots P_{r_n}$ jaunus, un pavisam dabūjam (ieskaitot arī sākumā bijušos) $P(r_1, r_2, \dots, r_n)P_{r_1}P_{r_2}\dots P_{r_n}$ izvietojumus, kas atbilst (i). Galu galā nonākam pie vienādībām

$$\text{K18: } P_r = P(r_1, r_2, \dots, r_n)P_{r_1}P_{r_2}\dots P_{r_n},$$

$$\text{K19: } P(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{P_r}{P_{r_1} P_{r_2} \dots P_{r_n}} = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}.$$

2.5. VINGRINĀJUMS. No K17 un K18 izriet, ka

$$C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_2} C_{r-r_1-r_2}^{r_3} \dots C_{r-r_1-r_2-\dots-r_{n-1}}^{r_n} = \frac{P_r}{P_{r_1} P_{r_2} \dots P_{r_n}}.$$

Parādiet to aritmētiski — izmantojot K10.

5. Mums jāiepazīstas ar vēl vienu nozīmīgu sakarību.

2.20. PIEMĒRS. *Kastītē ir n dažādas baltas un vēl viena melna bumbiņa. No tās jāizņem jebkuras r bumbiņas. Cik gadījumos starp tām būs melnā bumbiņa, un cik gadījumos visas izņemtās bumbiņas būs baltas?*

Protams r bumbiņas var izņemt C_{n+1}^r veidos, un katrs no tiem mums dod kādu bumbiņu kopas r elementu apakškopu. Sadalīsim visas šīs apakškopas divās grupās, vienā liekot tās apakškopas, kuras satur melno bumbiņu, bet otrā — pārējās, proti, tās, kuras satur tikai baltas bumbiņas. Jautājums ir, cik apakškopu ir katrā grupā.

To apakškopu, kurās nav melnās bumbiņas, ir C_n^r . Lai saprastu, cik ir otru apakškopu, apspriedīsim, kā tās var dabūt. Piemēram, var vispirms ņemt melno bumbiņu (te nav nekas jāizvēlas) un tad pievienot tai $r - 1$ baltu. Šis pēdējās tad var izraudzīties C_n^{r-1} veidos. Tikpat daudz tad arī ir apakškopu otrajā grupā.

ATBILDE: C_n^{r-1} un C_n^r (jeb $C_{n+1}^r - C_n^r$). ◀

Esam atklājuši šādu sakarību, kas būs noderīga nākamajā paragrāfā:

K20: $C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$.

Tā ir derīga jebkuram tādām r , ka $1 \leq r \leq n$.

2.6. VINGRINĀJUMS. Kādas būtu atbildes uz šī piemēra jautājumiem, ja visas baltās bumbiņas būtu vienādas (neatšķiramas)? ◀

Nākamais vingrinājums rādīs, cik labi esat izpratuši apskatīto piemēru.

2.7. VINGRINĀJUMS. Kādas sakarības, līdzīgi spriežot, var iegūt, ja pieņem, ka kastītē ir nevis viena, bet divas dažādas melnas bumbiņas? trīs?

ATBILDE: $C_{n+2}^r = C_n^{r-2} + 2C_n^{r-1} + C_n^r$ un $C_{n+3}^r = C_n^{r-3} + 3C_n^{r-2} + 3C_n^{r-1} + C_n^r$.

2.4. Ņūtona binoma formula

1. Šai paragrāfā ar kombinatorisku apsvērumu palīdzību patvaļīgam kāpinātājam n iegūsim izteiksmes $(x + y)^n$ izvirzījumu, ko dabū sareizinot n binomus $x + y$. Šādu izvirzījumu mēdz saukt par *binomiālo* izvirzījumu.

Lasītājam jau ir pazīstami izvirzījumi binoma $x + y$ otrajai un trešajai pakāpei. Tomēr detalizēti izrakstīsim, kā tos dabū.

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) = \\ &= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy = \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Kā redzams, gala izvirzījumā katru locekli dabū, vispirms sareizinot pa vienam ņemtus locekļus no visām iekavām, bet pēc tam savelkot līdzīgos reizinājumus. Ievērojiet, ka rezultātā iegūtajā polinomā visiem locekļiem ir viena un tā pati pakāpe (x un y kāpinātāju summa) — 2 vai, attiecīgi, 3. Izmantosim šo pašu ideju arī vispārīgam gadījumam ar patvaļīgu kāpinātāju. Tiesa, mēs vairs nevarēsim izrakstīt visas detaļas, un galvenie vērtējumi būs jāizdara prātā.

Izvērstā veidā

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ reizes}}.$$

Lai sareizinātu visus labās puses binomus, no katra izvēlamies vienu locekli x vai y un sareizinām tos. Tā kā binomu skaits ir n , tā iegūst reizinājumu izskatā $x^i y^{n-i}$, kur, atkarībā no ņemto locekļu x skaita, kāpinātājs i var būt jebkurš skaitlis, sākot ar 0 un beidzot ar n . Atkārtojam šo procedūru visos iespējamajos veidos; kā redzējām konkrētajos paraugos, tad daļa iegūto reizinājumu būs līdzīgi. Beidzot, summējam iegūtos reizinājumus. Iegūtās summas vispārīgais loceklis būs izskatā $c_i x^i y^{n-i}$, kur c_i ir pagaidām nezināms koeficients. Lai uzzinātu, kāds tas ir, noskaidrosim, cik veidos var reizinājumu $x^i y^{n-i}$ iegūt, t.i., kā no minētajiem binomiem var i reizes izvēlēties saskaitāmo x . Tad no atlikušajiem binomiem, kuru ir $n - i$, atliks (bez kādas īpašas izvēles!) ņaņemt y .

Šis ir jau pazīstams uzdevums par izlasēm — cik veidos no n priekšmetiem (šeit — binomiem) var izvēlēties kaut kādus i (tos, no kuriem nāks x). Izlases šeit ir nesakārtotas (ir vienalga, kādā kārtībā sareizina i vienādus reizinātājus) un bez atkārtojumiem (no katrām iekavām x ņem tikai vienreiz). Tātad meklētais koeficients c_i pie $x^i y^{n-i}$ ir C_n^i .

Patiešām, nav grūti pārlicināties, ka mūsu sākuma piemēros $1 = C_2^0 = C_2^2$ un $1 = C_3^0 = C_3^3$, $2 = C_2^1$, bet $3 = C_3^1 = C_3^2$. Tāpat ievērotā sakarība koeficientu noteikšanai der arī gadījumam $n = 1$, kad $(x + y)^1 = x + y$.

Tagad izrakstīsim iegūto izvirzījumu:

$$C_n^n x^n y^0 + C_n^{n-1} x^{n-1} y + \dots + C_n^0 x^0 y^n,$$

jeb, sakārtojot to pēc augošām x pakāpēm,

$$C_n^0 x^0 y^n + C_n^1 x^1 y^{n-1} + \dots + C_n^n x^n y^0.$$

Tā esam atklājuši, un vienlaikus — arī pierādījuši šādu teorēmu:

BINOMIĀLĀ TEORĒMA. Jebkuram naturālam n

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}.$$

Pašu teorēmā minēto vienādību mēdz saukt arī par *Ņūtona binoma formulu*.

Ārpus kombinatorikas binomiālo teorēmu parasti pierāda ar matemātisko indukciju. Izrakstīsim arī šādu pierādījumu, ļaujot lasītājam abus pierādījumus salīdzināt un izvērtēt, kurš ir „labāks”. Taču nākamo punktu bez bažām var arī izlaist: tālāk to nekur nevajadzēs.

2. Binomiālās teorēmas pierādījums ar matemātisko indukciju.

Mums būs jāatceras, ka (*) jebkuram n $C_n^0 = C_n^n = 1$ un ka (**) jebkuram n un visiem $i = 1, 2, \dots, n$ $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$. (skat. K1, K12 un K20).

A. Indukcijas bāze: $n = 1$.

Īstenībā mēs to jau pārbaudījām iepriekšējā punktā. Pārbaudāmās vienādības kreisajā pusē ir $(x + y)^1$, bet labās puses summā ir tikai divi locekļi $C_1^0 x^0 y^1$ un $C_1^1 x^1 y^0$, kas vienādi ar x un, attiecīgi, y . Tātad šai gadījumā Ņūtona binoma formula ir spēkā.

B. Induktīvā pāreja.

Induktīvais pieņēmums: iedomājamies, ka pārbaudāmā vienādība jau ir spēkā kaut kādai n vērtībai k , kur $k \geq 1$, t.i., ka

$$(x + y)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i y^{k-i}.$$

Induktīvais solis: parādām, ka tā ir spēkā arī nākamajai n vērtībai $k + 1$, t.i., ka

$$(x + y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i x^i y^{(k+1)-i}.$$

Sākam ar kreiso pusi un izmantojam induktīvo pieņēmumu:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k = (x+y) \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^i y^{k-i} = \\
&= x \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^i y^{k-i} + y \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^i y^{k-i} = \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i x^{i+1} y^{k-i} + \sum_{i=0}^k C_k^i x^i y^{k-i+1}.
\end{aligned}$$

Lai vieglāk saskatītu savēlamos līdzīgos locekļus no abām summām, ir lietderīgi vienādot vispārīgajos locekļos kāpinātāju izskatu. Pirmo summu, kas izvērstā veidā ir

$$C_k^0 x^1 y^k + C_k^1 x^2 y^{k-1} + \dots + C_k^k x^{k+1} y^0,$$

var pārrakstīt kā $\sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} x^i y^{k-i+1}$. Atdalot te atsevišķi pēdējo locekli, bet otrajā summā — pirmo locekli, kā arī ņemot vērā (*) un (**), galu galā dabūjam

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= \left(\sum_{i=1}^k C_k^{i-1} x^i y^{k-i+1} + C_k^k x^{k+1} y^0 \right) + \left(C_k^0 x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k C_k^i x^i y^{k-i+1} \right) = \\
&= x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k (C_k^{i-1} + C_k^i) x^i y^{k-i+1} + x^{k+1} y^0 = \\
&= C_{k+1}^0 x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k C_{k+1}^i x^i y^{k+1-i} + C_{k+1}^{k+1} x^{k+1} y^0 = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i x^i y^{k+1-i}.
\end{aligned}$$

Induktīvā pāreja ir veikta, un līdz ar to pārbaudāmā vienādība patiešām spēkā visām teorēmā minētajām vērtībām. Binomiālā teorēma ir pierādīta. ◀

Pievērsīsim tikai vēl uzmanību tam, ka induktīvais pierādījums nevar teorēmu *atklāt*: tās formulējums ir jau jāzina, un tad to var induktīvi *pamatot*.

3. Skaitļus C_n^i , ņemot vērā to lomu binomiālajā izvirzījumā, mēdz saukt par *binomiālajiem koeficientiem*.

Binomiālajai teorēmai ir vairākas interesantas sekas. Ņemot $x = y = 1$, dabūjam vienādību

$$\text{K21: } \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n = \bar{A}_2^n.$$

Bet ja ņem $x = -1$ un $y = 1$, tad dabū

$$\text{K22: } \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0.$$

2.8. VINGRINĀJUMS. Uzrakstiet binomiālo izvirzījumu (ar skaitliskiem koeficientiem) izteiksmēm $(a + b)^6$ un $(a - b)^6$. Tad ņemiet $a = 1, b = 1$ un pārbaudiet abas pēdējās vienādībās gadījumam $n = 6$. ◀

No vienādības K21 izriet

TEORĒMA PAR APAKŠKOPU SKAITU. Kopai, kurai ir n elementu, ir 2^n apakškopa.

Pierādījumam atliek vienīgi atcerēties, ka ikviena kopas apakškopa ir tās elementu kombinācija, un arī otrādi — katra tāda kombinācija ir kopas apakškopa. Tātad binomiālais koeficients C_n^i rāda, cik n elementu kopai ir apakškopa ar i elementiem, bet summa K21 kreisajā pusē — cik tai apakškopa ir pavisam.

2.9. VINGRINĀJUMS. Pārlicinieties, ka jebkuriem $n, k, l \geq 0$ ir spēkā vienādība

$$\text{K23: } \sum_{i=0}^n C_n^i \bar{A}_k^i \bar{A}_l^{n-i} = \bar{A}_{k+l}^n. \quad \blacktriangleleft$$

2.5. Uzdevumu risinājumu paraugi

1. Cik pavisam ir n -ciparu naturālu skaitļu ($n > 1$), kuros

- (a) cipari ir dilstošā secībā,
- (b) cipari ir augošā secībā,
- (c) visi cipari vienādi,
- (d) visi cipari dažādi,
- (e) neviens cipars nav mazāks par nākošo,
- (f) nav īpašu ierobežojumu.

Atgādināsim tikai, ka daudzciparu skaitļu veidošanu jau vairākkārt apspriedām, un aprobežosimies ar atbildēm. Protams, skaitļa pirmais cipars nav nulle.

ATBILDES: (a) C_{10}^n , (b) C_9^n , (c) C_9^1 , (d) $C_9^1 A_9^{n-1}$, (e) $\bar{C}_{10}^n - 1$, (f) $C_9^1 \bar{A}_{10}^{n-1}$.

2. Darbosimies ar drusku neparastu domino komplektu.

- (i) Cik pavisam ir domino kauliņu, kuru galos punktus raksta no 0 līdz k ?
- (ii) Cik tad ir tādu kauliņu pāru, kurus var pielikt vienu otram galā?

(i) Atgādināsim, ka parastā domino kauliņu komplektā, kur $k = 6$, ir 28 kauliņi. Šo skaitli var dabūt, piem., tā. Ir pavisam septiņi kauliņi, kuriem vismaz vienā galā ir sešnieks. Tiem jāpieskaita seši kauliņi, kuriem vienā galā ir piecnieks, bet otrā nav sešnieks. Vēl jāpieskaita pieci kauliņi, kuriem vienā galā četrinieks, bet otrā — ne vairāk par četri u.t.t. Tāpat domājot vispārīgā gadījumā, dabūsim, ka meklētais kauliņu skaits ir $1 + 2 + \dots + (k + 1)$. Ja vēl turklāt ir zināma formula pirmo $k + 1$ naturālo skaitļu summas aprēķināšanai, galu galā iegūstam atbildi $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$.

Šī atbilde, protams, ir pareiza, bet tādā risinājumā, izņemot saskaitīšanas principa lietojumu, nav nekā no kombinatorikas, un, uzdevumu atrisinot, nesam iemācījušies neko jaunu, kas varētu noderēt citos. Tāpēc aplūkosim citādu risinājumu.

Vispirms pārformulēsim uzdevumu šādi. Iedomāsimies, ka mūsu rīcībā ir „tukši” domino kauliņi — sagataves bez uzrādītiem punktiem, un ka mums pašiem šie punkti uz katra kauliņa jāuzraksta; cik sagatavju būs vajadzīgs, lai iegūtu maksimāli daudz kauliņu? Ņemam vienu sagatavi; lai to pārvērstu par domino kauliņu, mums tad jāizlemj, ko rakstīt katrā sagataves galā. Tas

nozīmē, ka mums jāizvēlas divi no $k + 1$ pieļaujamiem skaitļiem jeb jāveido 2-izlase no $k + 1$. Vai pieļaujami atkārtojumi? Protams, jā: tā iegūsim t.s. dubletus. Vai šīs izlases jāuzskata par sakārtotām? Nē, jo samainot vietām kauliņa galos norādītos punktus, mēs nedabūjam citu kauliņu. Tātad pavisam izlietosim \bar{C}_{k+1}^2 sagataves, un tā arī ir atbilde. K16 rāda, ka tā sakrīt ar iepriekšējo. Vienlaikus esam pamatojuši formulu

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

ja tā nav bijusi zināma agrāk.

Dažkārt dubletus un pārējos kauliņus skaita atsevišķi. Protams, dubletu skaits ir C_{k+1}^1 . Tukšu sagatavi pārvērst par kauliņu, kas nav dublets, var C_{k+1}^2 veidos. Abu skaitļu summa dod galīgo kauliņu skaitu un vienlaikus vēl vienu sakarību starp pamatskaitļiem, kuru gan nenumurēsim:

$$\bar{C}_{k+1}^2 = C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2.$$

Pēc K15 vai K20 atbildi var izteikt arī kā C_{k+2}^2 . Šo pēdējo skaitli var iedomāties kā to domino kauliņu skaitu, kam punktus raksta no 0 līdz $k + 1$ un kas nav dubleti. Kāds tam sakars ar mūsu uzdevumu? Atlasiet tos kauliņus, kam vienā galā ir $k + 1$, un rakstiet tai vietā to pašu punktu skaitu, kas ir kauliņa otrā galā: tā būs precīzi iegūts domino komplekts ar punktiem līdz k .

(ii) Dabisks vilinājums ir ņemt visus nupat saskaitītos kauliņus, izraudzīties no tiem divus piemērotus, un apsvērt, kāda izlase tad veidojas. Pirmo kauliņu ņem brīvi; lai piemeklētu otro, tagad jāšķiro divi gadījumi. Ja pirmais kauliņš ir dublets, varam piemeklēt tam k pāriniekus. Pavisam ir $k + 1$ dublets, tāpēc šādā kārtā dabūjam jau $k(k + 1)$ pārus. Ja pirmais kauliņš nav dublets, k kauliņus tam var pielikt katrā galā. Kauliņu kas nav dubleti, ir $n - k - 1$, kur n ir visu kauliņu skaits (skat. (i)). Šādi dabūjam $(n - k - 1) \cdot 2k$ pārus; kopā tātad ir $k(2n - k + 1)$ jeb $k(k + 1)^2$ meklēto pāru.

Taču šī atbilde nav gluži pareiza, jo, rīkojoties aprakstītajā veidā, pāri tiek uzskaitīti vairākas reizes. Pieņemsim, ka pirmais kauliņš ir dublets 6:6; tam galā var pielikt 6:5. Vēlāk, kad par pirmo kauliņu tiks ņemts 5:6, tam vienā galā varēs pielikt 6:6. Tā šis pāris tiek uzskaitīts divreiz.

Pie 5:6 var pielikt arī kauliņu 3:5, bet pēc tam, uzsākot ar 3:5, dabū to pašu pāri, turpinot ar 5:6. Tātad arī tas tiek uzskaitīts divreiz. Citādu atkārtojumu nav (padomājiet, kāpēc!), un galu galā izrādās, ka pāru patiesībā ir divreiz mazāk.

Ir vērts pameklēt citu, īsāku ceļu. Ņemsim atkal tukšas sagataves, sākam divas. Lai iegūtu vienu pie otra pieliekamu kauliņu pāri, jāizvēlas trīs skaitļi: viens, ko rakstīt kopā saliktajos galos, un divi, kas būs brīvajos galos. Pirmo izvēli var izdarīt C_{k+1}^1 veidos. Divi pārēji skaitļi, acīmredzot, nevar

būt vienādi, un nav svarīgi, kurā tukšajā pozīcijā katru no tiem raksta. Šo izvēli tad var izdarīt C_{k+1}^2 veidos. Kopā pēc sareizināšanas likuma ir $C_{k+1}^1 C_{k+1}^2$ iespēju, kā aizpildīt abas sagataves.

Vēl pārdomājot, ir redzams, ka šādi rīkojoties, neviens vajadzīgais kauliņu pāris nepaliks neiegūts un nevienu neiegūsim vairākkārt. Tāpēc nupat izrēķinātais reizinājums ir arī galīgā atbilde. Ievērojiet, ka šoreiz nemaz nebija jāzina skaitlis n — kauliņu kopskaits!

ATBILDE: (i) $\bar{C}_{k+1}^2 = C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, (ii) $C_{k+1}^1 C_{k+1}^2 = \frac{1}{2}k(k+1)^2$. ◀

3. (DU 32) *Krosa skrējienā piedalījās Jānis, Aldis, Mārtiņš un vēl 17 skolēni. Cik ir tādu gadījumu, kuros*

- (a) *Aldis un Mārtiņš finišēja viens aiz otra;*
- (b) *Aldis un Jānis neierindojās blakus esošās vietās;*
- (c) *Mārtiņš nebija ne pirmais, ne pēdējais;*
- (d) *Aldis bija pirmais, bet Jānis nebija pēdējais;*
- (e) *Jānis, Aldis un Mārtiņš ieguva pirmās 3 vietas;*
- (f) *Jānis, Aldis un Mārtiņš finišēja norādītajā secībā;*
- (g) *Jānis finišēja pirms Mārtiņa;*
- (h) *Aldis finišēja pirms Jāņa un Mārtiņa?*

Pēc skrējiena visi 20 skolēni sarindojas noteiktā secībā atbilstoši iegūtajām vietām (pieņemam, ka nefinišēja vairāki reizē), un mums patiesībā jāskaita, cik veidos, atbilstoši uzdevuma noteikumiem, tāda sarindošanās ir izdarāma. Lai būtu vieglāk saskatīt, kur šeit rodas kādas izvēles un izlases, labāk aizstāsim skrējieni ar kādu ērtāk veicamu sarindošanas procedūru. Izmantosim divas šādas: iedomāsimies, ka

- vārdā nenosauktie skrējiena dalībnieki sastājas vienā rindā, bet pēc tam Jānis (J), Aldis (A) vai Mārtiņš (M) izraugās vietas sev (rindas sākumā, beigās vai starp rindā stāvošajiem),
- skrējiena dalībnieki izlozē vai paši izvēlas kārtas numurus no 1 līdz 20.

Vienu un to pašu piemēru mēģināsim risināt dažādi, bet atbildi aprakstīsim ar piemērotu pamatskaitli vai arī ar pamatskaitļu kombinējumu (skaitliskas atbildes var atrast krājumā DU). Nav izslēgts, ka kādā piemērā var spriest vēl savādāk.

(a) 18 skolēni (bez A un M) var nostāties rindā P_{18} veidos. Tad A ar M var iestāties vienā no 19 vietām; pie tam A drīkst nostāties pirms M vai arī otrādi. ATBILDE: $P_{18}C_{19}^1P_2$.

A un vēl 18 skolēnu nostājas vienā rindā. Pēc tam M nostājas vai nu tieši pirms, vai arī tieši aiz A. ATBILDE: $P_{19}C_2^1$.

A ar M izvēlas divus blakus esošus kārtas numurus un sadala tos savā starpā. Īstenībā viņiem jāizvēlas viens numurs no 1 līdz 19; tieši sekojošais vairs neprasa jaunu izvēli. Pārējie sadala atlikušos 18 numurus. ATBILDE: $2C_{19}^1P_{18}$.

(b) 20 skolēni var nostāties rindā P_{20} veidos. Šoreiz mūs interesē tieši tie veidi, kas netika uzskaitīti (a) punktā. ATBILDE: $P_{20} - 2P_{19}$.

A un vēl 18 skolēni nostājas vienā rindā, pēc tam J izvēlas piemērotu vietu. ATBILDE: $P_{19}C_{18}^1$.

(c) 19 skolēni (bez M) nostājas vienā rindā, pēc tam piemērotā vietā iestājas M. ATBILDE: $P_{19}C_{18}^1$.

Tādu izvietojumu vienā rindā, kur M ir pirmais, ir P_{19} , un tikpat ir izvietojumu, kur M ir pēdējais. ATBILDE: $P_{20} - 2P_{19}$.

M izvēlas vienu numuru starp 2 un 19, bet pārējie sadala atlikušos 19. ATBILDE: $C_{18}^1P_{19}$.

(d) 18 skolēni (bez A un J) nostājas vienā rindā. A nav izvēles, bet J izvēlas sev piemērotu vietu. ATBILDE: $P_{18}C_{18}^1$.

A paņem savu pirmo numuru (bez izvēles), J izvēlas sev numuru no 2 līdz 19, bet pārējie sadala atlikušos 18 numurus. ATBILDE: $C_{18}^1P_{18}$.

(e) J, A un M sadala savā starpā pirmos trīs numurus, pārējie — atlikušos 17. ATBILDE: P_3P_{17} .

17 skolēni (bez nosauktajiem) nostājas vienā rindā, bet J, A un M nostājas rindas sākumā patvaļīgā secībā. ATBILDE: $P_{17}P_3$.

(f) 17 skolēni nostājas vienā rindā. J, A un M tagad var sev izvēlēties (ar atkārtojumiem) 3 no 18 vietām rindā. Savu vietu secība viņiem nav jāizvēlas — tā noteikta uzdevumā. ATBILDE: $P_{17}\bar{C}_{18}^3$.

17 skolēni izvēlas katrs sev vienu numuru no 1 līdz 20, bet J, A un M paliek trīs pārējie; katrs no viņiem jau zina, kurš būs kuram. ATBILDE: A_{20}^{17} .

J, A un M izvēlas sev trīs numurus; nav jāskaidro, kuram būs kurš. Pārējie sadala savā starpā atlikušos 17 numurus. ATBILDE: $C_{20}^3P_{17}$.

Brīdinājums: šīs atbildes nesakrīt ar DU norādīto, kas vai nu nav pareiza, vai arī rodas kā citādi izprotot (f) uzdevuma tekstu.

(g) Spriežot tāpat kā (f) punktā, var dabūt atbildes $P_{18}\bar{C}_{19}^2$, A_{20}^{18} vai $C_{20}^2P_{18}$.

Puse visu iespējamo gadījumu ir tāda, kur J ir pirms M, otra puse — kur ir otrādi. ATBILDE: $\frac{1}{2}P_{20}$.

J izvēlas numuru no 1 līdz 19, bet M — lielāku. Pārējie sadala sev atlikušos 18 numurus. Pirmo izvēli var izdarīt C_{19}^1 , bet trešo — P_{18} veidos; diemžēl, te nav pasakāms, cik veidos numuru var izvēlēties M: tas atkarīgs no tā, ko izvēlēties J. Tāpēc neatliek nekas cits, kā izskatīt visus gadījumus un lietot saskaitīšanas principu. ATBILDE: $(19 + 18 + \dots + 1) \cdot P_{18}$ jeb $C_{20}^2 P_{18}$.

(h) A, J un M izvēlas sev trīs numurus (mazākais tiek A, abi pārējie — J un M nenoteiktā secībā). Pa to laiku pārējie sadala atlikušos 17 numurus. ATBILDE: $C_{20}^3 P_2 \cdot P_{17}$.

Spriežot tāpat kā (f) punktā, var noskaidrot, cik ir gadījumu, kad A, J un M finišeja šai secībā. Tikpat ir gadījumu, kad M un J ir mainītās vietās, bet aiz A. ATBILDE: $2A_{20}^{17}$.

Piezīme: tas ir divreiz vairāk nekā norādīts DU. Tur varētu būt minēts gadījumu skaits, kad A finišeja pirms J, bet J, savukārt, pirms M.

4. (DU 64) *Skolēnam ieskaitei jāsaprotavo 20 jautājumi. Cik dažādos veidos skolotājs var uzdot trīs jautājumus tā, lai vismaz vienam no tiem numurs būtu lielāks par 15?*

Salīdziniet: Kastītē ir 20 dažādas bumbiņas — 5 baltas un 15 melnas; no tām jāizņem trīs tā lai vismaz viena būtu balta. Te ir arī vajadzība pēc saskaitīšanas principa.

$$\text{ATBILDE: } C_5^1 C_{15}^2 + C_5^2 C_{15}^1 + C_5^3 \text{ (neder } C_5^1 C_{19}^2).$$

5. (DU 93) *Kontroldarbu rakstīja 16 skolēni. Viens skolēns saņēma atzīmi 5, deviņi — atzīmi 4, četri — atzīmi 3, bet divi — atzīmi 2. Cik dažādu atzīmju sadalījumi ir iespējami?*

16 bumbiņas jāsadala pa 4 urnām tā lai pirmajā būtu 1, otrajā 9, trešajā 4, ceturtajā 2 bumbiņas.

$$\text{ATBILDE: } P(1, 9, 4, 2) \text{ jeb } C_{16}^1 C_{15}^9 C_6^4.$$

6. (DU 97) *Sešciparu skaitļa pierakstā ir izmantoti tikai cipari 1, 2 un 3, pie tam katrā skaitlī cipars 2 ir izmantots tieši divas reizes. Cik šādu sešciparu skaitļu var uzrakstīt?*

Tā kā te ir noteikts ierobežojums, vienkārši sešreizēja cipara izvēle nederēs. Vispirms izšķirsimies, kurās pozīcijās rakstīt divnieku, bet pārējās četrās vienu ciparu no diviem atlikušajiem varam izvēlēties brīvi.

$$\text{ATBILDE: } C_6^2 \bar{A}_2^4.$$

7. (DU 104) No 10 dažādiem ziediem jāizveido buķete tā lai tajā būtu vismaz divi ziedi. Ar cik dažādiem paņēmieniem to var izdarīt?

ATBILDE: $C_{10}^2 + C_{10}^3 + \dots + C_{10}^{10}$ jeb $2^{10} - (C_{10}^0 + C_{10}^1)$.

8. (DU 108) Automobiļu numuri sastāv no 3 burtiem (pavisam izmanto 30 burtus) un 4 cipariem. Cik automobiļiem var izdot valsts numuru zīmes, ja nekādiem diviem automobiļiem numuri nedrīkst būt vienādi?

Protams, labāk skaitīt ne automobiļus, bet iespējamos numurus.

ATBILDE: $\bar{A}_{30}^3 \bar{A}_{10}^4$.

9. m baltas un n melnas bumbiņas jāizvieto vienā virknē tā, ka

- (a) nav nekādu ierobežojumu,
- (b) virkne nesākas ar baltu bumbiņu,
- (c) divas melnās bumbiņas nekur nav blakus,
- (d) visas melnās bumbiņas atrodas vienkopus — blakus cita citai.

Cik veidos to var izdarīt, ja visas vienas krāsas bumbiņas ir neatšķiramas?

Iespējami vismaz četri paņēmieni, kā iegūt vajadzīgā izskata bumbiņu virkni: (i) vispirms izvietojam vienā rindā visas melnās bumbiņas (to var izdarīt vienā vienīgā veidā), tad piemērotās vietās ieliekam baltās, (ii) otrādi — vispirms izvietojam rindā visas baltās bumbiņas (vienā vienīgā veidā), tad piemērotās vietās ieliekam melnās, (iii) iedomājamies, ka vienā rindā novietotas $m+n$ kastītes, un liekam katrā kastītē vienu bumbiņu, (iv) ja gatavā bumbiņu izvietojumā pievērs uzmanību tikai bumbiņu krāsām, tad tas nav nekas cits kā divu krāsu permutācija ar atkārtojumiem. Izpētīsim katrā no četriem prasītajiem gadījumiem visus šos paņēmienus.

- (a) (i) Ikvienai balto bumbiņu var likt melno rindas sākumā, beigās vai starp jebkurām melnajām bumbiņām. ATBILDE: \bar{C}_{n+1}^m .
- (ii) Spriežam līdzīgi. ATBILDE: \bar{C}_{m+1}^n .
- (iii) Izvēlamies jebkuras m kastītes baltajām bumbiņām, pārējās atliks melnajām (var arī otrādi). ATBILDE: C_{m+n}^m jeb C_{m+n}^n .
- (iv) Mūs interesē patvaļīgas divu krāsu permutācijas, kuru sastāvs ir (m, n) . ATBILDE: $P(m, n)$.

- (b) (i) Šoreiz baltu bumbiņu nedrīkst likt melno rindas sākumā. ATBILDE: \bar{C}_n^m .
- (ii) Noliekam vienu melnu bumbiņu rindas sākumā, ar pārējām rīkojamies tāpat kā iepriekš (rindas sākumā var likt vēl!). ATBILDE: \bar{C}_{m+1}^{m-1} .
- (iii) Ieliekam pirmajā kastītē melnu bumbiņu, bet ar pārējām rīkojamies tāpat kā iepriekš. ATBILDE: C_{m+n-1}^m jeb C_{m+n-1}^{m-1} .
- (iv) Pirmajā pozīcijā krāsa ir fiksēta. ATBILDE: $P(m, n - 1)$.
- (c) (i) Vispirms ieliekam melno bumbiņu rindā katrā starpā vienu baltu; tas izdarāms vienā vienīgā veidā. Ja vēl paliek baltas bumbiņas, tās izvietojam brīvi (kā (a) gadījumā). ATBILDE: \bar{C}_{n+1}^{m-n+1} .
- (ii) Katrā no $m + 1$ vietām var likt ne vairāk kā vienu melnu bumbiņu. Izvēlamies tās n vietas, kurās melnās bumbiņas būs. ATBILDE: C_{m+1}^n .
- (iii) Nav īsti laba rīcības plāna. Var darīt tā: ieliekam $n - 1$ kastītē pa baltai bumbiņai un atliekam šīs kastītes malā rezervei: kad atlikušas bumbiņas (to ir $m + 1$) brīvi būs izvietotas pa pārējām kastītēm, novietosim pa vienai rezervētajai kastītei tūdaļ aiz katras kastītes, kurā ir melna bumbiņa. Rezervēšana, protams, ir bez variantiem. ATBILDE: C_{m+1}^n jeb C_{m+1}^{m-n+1} .
- (iv) Līdzīgi: rezervējam $n - 1$ baltu bumbiņu, kuras ielikt aiz katras melnās bumbiņas, izņemot pēdējo, kad pārējās bumbiņas būs izvietotas patvaļīgā rindā. Tātad mums jā rūpējas tikai par abu krāsu $(m + 1)$ -permutācijām ar sastāvu $(m - n + 1, n)$. ATBILDE: $P(m - n + 1, n)$.
- (d) (i) Daļu balto bumbiņu (varbūt visas vai arī nevienu) liekam melno rindas sākumā, pārējās beigās. Jāizlemj, cik likt sākumā — viens no $m + 1$ skaitļiem. ATBILDE: C_{m+1}^1 .
- (ii) Visas melnās bumbiņas kopā jāieliek vienā no iespējamām $m + 1$ vietām. (Var domāt tā: cik veidos pie baltajām var pievienot vienu melnu; pārējās melnās tad liek turpat, un tas nerada jaunus variantus.) ATBILDE: C_{m+1}^1 .
- (iii) Jāizraugās, kur likt pirmo no melnajām bumbiņām; tas nedrīkst būt pārāk tuvu kastīšu rindas beigām. ATBILDE: $C_{(m+n)-(n-1)}^1$.
- (iv) Visu melno bumbiņu rindu uzskatām par vienu melnu objektu. ATBILDE: $P(m, 1)$.

10. *Tas pats, ja visas baltās un visas melnās bumbiņas ir dažādas.*

Var, protams, atkārtot iepriekšējos spriedumus un meklēt, kur būs vajadzīgas kādas korekcijas. To izdarīt pat būtu pamācoši. Tomēr visvienkāršāk ir

šaut visus zaķus ar vienu šāvienu. Iedomāsimies, ka iepriekšējā uzdevuma izvietojumos pēkšņi pamanām, ka bumbiņas īstenībā ir dažādas. Tātad katrā no šiem izvietojumiem vajag vēl visos iespējamajos veidos samainīt vietām visas baltās, kā arī visas melnās bumbiņas. To var izdarīt attiecīgi P_m un P_n veidos. Tātad visas iepriekšējā uzdevuma atbildes jāpareizina ar $P_m P_n$.

Paraudzīsimies vēl, kā šo uzdevumu risināt tieši — neatsaucoties uz iepriekšējo.

- (a) Ja reiz visas bumbiņas dažādas, šajā gadījumā to krāsai nav nozīmes. ATBILDE: P_{m+n} .
- (b) Vispirms izraugāties vienu no baltajām bumbiņām un liekam to rindas sākumā. Pārējās saliekam patvaļīgā rindā — tāpat kā iepriekš, tām krāsa vairs nav svarīga. ATBILDE: $C_m^1 P_{m+n-1}$.
- (c) Baltās bumbiņas vienas pašas var izvietot rindā P_m veidos. Starp tām (ieskaitot arī divas brīvās vietas pirms un aiz tām) A_{m+1}^n veidos var noteiktā secībā izraudzīties vietas kur nolikt pa vienai melnai bumbiņai. ATBILDE: $P_m A_{m+1}^n$.
- (d) Baltās bumbiņas kopā ar vēl vienu sarkanu (tā rādīs, kur būs melnās bumbiņas) var izvietot rindā P_{m+1} veidos, bet melnās — P_n veidos. Tad sarkano bumbiņu aizmetam, bet tās vietā, secību nemainot, saliekam visas melnās. ATBILDE: $P_{m+1} P_n$.

Tagad, izdalot šīs atbildes ar $P_m P_n$, var dabūt atbildes uz attiecīgajiem iepriekšējā uzdevuma jautājumiem.

3. Izmēģinājumi un notikumi

Šīs divas idejas ir jau pašu vienkāršāko kombinatorikas un varbūtību teorijas faktu pamatā, tādēļ arī kursu turpinām, iepazīstoties ar attiecīgajiem jēdzieniem. Izmēģinājumus bieži sauc arī par eksperimentiem; nozīmes ziņā radniecīgs ir jau iepriekšējā nodaļā bieži lietotais termins 'izvēle'.

3.1. Kas ir izmēģinājums?

Katram izmēģinājumam, kā šo vārdu sapratīsim mūsu kursā, ir raksturīga kaut kādas sākotnējas nenoteiktības likvidēšana: pirms izmēģinājuma izdarīšanas mums jāreķinās ar dažādām iespējām, kāds būs tā iznākums, bet izmēģinājuma gaitā realizējas viena no tām. Ievadā jau apspriedām vairākus izmēģinājumus — divu spēļu kauliņu mešanu, vienas vai divu monētu mešanu, domino kauliņa izvēli. Vispār, jebkura veida izlases veidošana ir kombinatorikai tipisks izmēģinājums. Lūk, vēl daži konkrēti izmēģinājumu piemēri:

- (a) Plauktā ir vairākas grāmatas; ņem vienu no tām.
- (b) Vilciena vagonā izvēlas vienu no brīvajām sēdvietām.
- (c) Valsts futbola čempionātā noskaidrojas trīs labākie klubi, kuri piedalīsies dažādos Eiropas turnīros.
- (d) No kastītes „uz labu laimi” izvelk vienu no tur esošajām lozēm.
- (e) Sākot šaha (vai dambretes) partiju, baltie izvēlas pirmo gājieni.
- (f) Izdarot socioloģisku aptauju, pieraksta aptaujājamā vecumu (pilnus gadus).
- (g) Asins analīzes laikā laboratorijā nosaka hemoglobīna daudzumu procentos pacienta asinīs.
- (h) Saeimas vēlēšanās noskaidro, kuras partijas būs parlamentā pārstāvētas.
- (i) Sacīkstēs šāvējs ar katru šāvieni iegūst no 0 līdz 10 punktiem.

Kā redzam, izmēģinājuma raksturs un fizikālā izpausme var būt visai dažādi, taču tam nav nozīmes izmēģinājuma matemātiskā aprakstā. Toties ir svarīgi apzināties, ka kāds izmēģinājums ir viennozīmīgi noteikts, bet teorēma vai uzdevums, kurā ir runa par izmēģinājumu — pareizi saprotams vienīgi tad, ja ir noskaidrotas, kādas tad ir nodaļas sākumā pieminētās iespējas jeb šī izmēģinājuma iznākumi. Mūsu septiņos piemēros tas it kā redzams no

izmēģinājuma apraksta. Taču dažkārt ar mēģinājuma gaitas aprakstu vien ir par maz. Mēs jau redzējām ievada 1. punktā, ka par divu kauliņu metiena rezultātu varēja uzskatīt gan uzkrītošo punktu summu, gan pašus uzkrītumus, pie kam pēdējā gadījumā bija vēl svarīgi izšķirt, vai jāinteresējas par nesakārtotiem vai sakārtotiem skaitļu pāriem. Minēsim vēl kādu piemēru.

3.1. PIEMĒRS. Novērotājs no malas redz, ka Jānis izvelk vienu kārti no pilnas kāršu paciņas, kurā ir 52 kārtis. Laikam gan visdabiskāk ir iedomāties, ka te katra kārts (proti, noteiktā veidā apdrukāts kartona gabaliņš) ir viens iespējams iznākums. Līdzvērtīgi novērotājs varētu domāt, ka iznākums ir izvilktās kārts pilnīgs *apraksts*, kas satur kārts masti (jeb sugu) un numuru (nosaukumu), piem., ♠5. Taču Jāni, varbūt, interesē tikai izvilktās kārts masts vai arī tikai tās numurs — tad tie ir jau divi *citi* izmēģinājumi ar četriem (♠, ♥, ♣, ♦) vai ar trīspadsmit iznākumiem. Vēl vienkāršāks ir izmēģinājums, kurā Jānis fiksē vienīgi, vai būs dūzis, vai nē; te ir divi iznākumi. Novērotājs, kurš redz tikai izmēģinājuma norisi, nevar zināt, kurš no šiem izmēģinājumiem notiek. ◀

Uzskatīsim, ka fiksēt kaut kādu izmēģinājumu nozīmē norādīt kādu kopu Ω kopā ar procedūru, kas ļauj izraudzīties no šīs kopas *jebkuru* tās elementu. Kopas Ω elementus sauksim par izmēģinājuma *iespējamajiem iznākumiem*, un pašu kopu Ω — par izmēģinājuma *iznākumu kopu*.

(Simbols Ω ir grieķu alfabēta lielais burts, kuru lasa *Omega*.)

Patiesībā ikviena kopa, lai kas arī nebūtu tās elementi, der par iespējamo iznākumu kopu kādam izmēģinājumam, kurā izvēlas vienu šīs kopas elementu. Pie tam vārds 'izvēlas', kā rāda sākumā uzskaitītie piemēri, te jāsaprot visai plašā nozīmē. Darbosimies gan tikai ar *galīgiem* izmēģinājumiem, t.i., tādiem, kam galīgs skaits iznākumu (netriviālā gadījumā — vismaz divi). Protams, izmēģinājumu izpildot, katreiz parādās tikai viens iznākums, taču, kā jau bija uzsvērts, pieņemam, ka nav tādu iznākumu, kuri nevar parādīties nemaz.

Piezīme. Šī pēdējā noruna dažkārt var sagādāt tīri praktiskas grūtības. Piemēram, socioloģiskajā aptaujā (skat. (f) piemēru sadaļas sākumā) dabiska iznākumu kopa būtu iespējamo atbilžu (gadu skaitu) kopa. Bet pirms aptaujas izdarīšanas tā nav zināma: var vienīgi norādīt pietiekami plašu atbilžu diapozonu, teiksim, no 6 līdz 80 gadiem. Tomēr iespējams, it īpaši, ja aptaujājamā grupa nav liela, ka ne visi skaitļi šai diapazonā tiks nosaukti. Taču precīza aptaujājamo cilvēku gadu skaitu kopa, kaut nav zināma, protams, pastāv, un tā tad arī jāuzskata par kopu Ω šai izmēģinājumā.

No otras puses, jāuzsver, ka jau pēc savas definīcijas iznākumu kopa vienmēr ir *pilna* tai nozīmē, ka, izmēģinājumu izdarot, vienmēr parādās kāds no šai kopā esošajiem iznākumiem un nekādu citu iznākumu vienkārši nav. Ja monētas mešanai paredzēta iznākumu kopa $\{c, \acute{g}\}$, tad tas nozīmē, ka šī izmēģinājuma matemātiskajā aprakstā izslēgta, piem., iespēja monētai nokrist un palikt uz malas, t.i., tādi metieni tiek ignorēti. Līdzīgi, uzskatot, ka šāvējs ar katru šāvieni iegūst no 1 līdz 10 punktiem (skat. pēdējo no sākuma piemēriem), mēs galu galā apzināti vai neapzināti ignorējam tos šāvienus, kad šāvējs mērķi nemaz netrāpa.

3.2. Notikumi un to salīdzināšana

1. Nereti (kā tas bija 1. (ievada) nodaļā), izdarot izmēģinājumu, mūs interesē ne tik daudz, kāds būs iznākums, bet gan — vai izpildīsies kāds noteikts ar iznākumiem saistīts nosacījums (vai pat vairāki).

Par *notikumu* apskatāmā izmēģinājumā sauksim to faktu, ka izpildās kāds nosacījums,

un šis nosacījums tad ir minētā notikuma *apraksts*. Nosacījums izmēģinājumā var izpildīties, bet var arī neizpildīties; līdz ar to attiecīgais notikums var notikt, bet var īstenībā arī *nenotikt*. Piem., ja s nozīmē divu spēļu kauliņu uzkrītošo punktu summu (kā 1. nodaļā), mēdz teikt gan, ka metienā

izpildījies (vai nav izpildījies) nosacījums $s \leq 4$,

gan arī — ar to pašu domu —

noticis (vai, attiecīgi, nav noticis) notikums, ka $s \leq 4$.

3.2. PIEMĒRS. Burvju mākslinieks grib pirms uzstāšanās savās k kabatās noslēpt l burvju lietas. Te rodas izmēģinājums, kuram, kā zinām no iepriekšējā nodaļas 2.16. piemēra ar bumbiņām un urnām, ir \bar{A}_k^l iznākumu — šoreiz tie ir lietu izvietojumi kabatās. Viens iespējams notikums ir, ka katrā kabatā ir ne vairāk kā viena lieta, cits — ka katrā kabatā ir tieši viena lieta, vēl cits — ka neviena kabata nav palikusi tukša, vēl cits — ka trešajā kabatā gadījušās tieši trīs lietas u.tml. ◀

Kad met vienu kauliņu, nosacījumi '*uzkrītoši 4 vai 5 punkti*' un '*uzkrītošo punktu skaits nav skaitļa 6 daļītājs*' ir *līdzvērtīgi* tai nozīmē, ka tie vienmēr izpildās vai arī neizpildās abi reizē. Tādejādi,

līdzvērtīgi nosacījumi apraksta vienu un to pašu notikumu.

Tas ir viens no iemesliem, kāpēc parasti runā tieši par notikumiem — kā redzēsim, tā izrādās parocīgāk.

Tāpat kā vietām jau darījām ievada nodaļā,

iespējamu izmēģinājuma iznākumu saucim par *labvēlīgu* kādam notikumam, ja, šim iznākumam parādoties, minētais notikums patiešām notiek; pārējos iznākumus saucim par notikumam *nelabvēlīgiem*.

Piemēram, ievada pirmajā paragrāfā mēs saskaitījām, ka, metot divus spēļu kauliņus, notikumam $s \leq 4$ ir 4 labvēlīgi iznākumi, kad kauliņi vienādi, un 6, kad tie dažādi. Ja kastītē ir 3 pilnas lozes un 7 tukšas, tad notikumam, ka izvilktā loze būs pilna, ir 3 labvēlīgi un 7 nelabvēlīgi iznākumi. No tikko pārrunātā izriet

NOTIKUMU VIENĀDĪBAS KRITĒRIJS: ja diviem notikumiem ir vieni un tie paši labvēlīgie (tātad arī nelabvēlīgie!) iznākumi, tad šie notikumi sakrīt.

Citiem vārdiem, tas īstenībā ir viens un tas pats notikums. Salīdzinot šo konstatējumu ar iepriekšējo rindkopu, redzam, ka visu informāciju par notikumu (kad tas notiek un kad nē) satur šim notikumam labvēlīgo iznākumu kopa. Līdz ar to mūsu pieņemtais skatījums uz notikumiem rāda, ka — vismaz matemātiski — nav jēgas runāt par notikumu pirms nav fiksēts izmēģinājums, uz kuru tas attiecas (taču ir sastopami arī citādi skatījumi, par ko šeit sīkāk nerunāsim). Jāievēro arī piesardzība, runājot par notikumiem, kuri saistīti ar dažādiem izmēģinājumiem. Neliels piemērs: Iedomāsimies, ka bez nupat minētās ir vēl otra kastīte ar lozēm, kurā ir 2 pilnas un 5 tukšas. Tad viens un tas pats nosacījums *izvilktā loze ir pilna* apraksta vienu notikumu iepriekšējā izmēģinājumā, kad velk lozi no pirmās kastītes, un pavisam citu (starp citu, ar 2 labvēlīgiem iznākumiem), kad lozi velk no otrās kastītes. Pat vilkt otru lozi no pirmās kastītes — arī tas ir jau cits izmēģinājums ar mazāk iznākumiem.

Jau ievadā redzējām, ka stādīt priekšā konkrētu notikumu visērtāk ir, aprakstot to ar piemērotu nosacījumu. Tai vietā var uzskaitīt notikumam labvēlīgos izmēģinājuma iznākumus. Patvaļīgus notikumus parasti apzīmē ar lielajiem alfabēta sākuma burtiem A, B, C u.tml., vajadzības gadījumā lietojot arī indeksus, bet dažiem īpašiem notikumiem ievēd speciālus apzīmējumus. Kādam notikumam A labvēlīgo iznākumu kopu parasti apzīmēsim ar Ω_A .

3.1. VINGRINĀJUMS. Mēs redzēsim, ka izmēģinājumā ar n iznākumiem ir pavisam 2^n dažādu notikumu. Aprakstiet visus notikumus (a) izmēģinājumā ar vienas monētas mešanu, (b) lozes vilkšanā no kastītes, kurā ir pavisam

trīs lozes: viena iezīmēta ar krustiņu, otra — ar ripulīti, bet trešā — ar trijstūrīti.

Iespējams, ka atrast dažus „noklīdušus” notikumus jums palīdzēs nākamās rindkopas. ◀

2. Pieņemsim, ka mums ir fiksēts kāds izmēģinājums.

Paši vienkāršākie notikumi izmēģinājumā ir tie, kas nozīmē viena atsevišķa iznākuma parādīšanos.

Notikumu sauc par *elementāru*, ja tam ir viens vienīgs labvēlīgs iznākums.

Piemēram, metot spēļu kauliņu un reģistrējot, cik punktu uzkritis, varam sagaidīt sešus dažādus elementārus notikumus: ka uzkritis viens punkts, ka uzkrituši divi punkti utt. Atgriežoties pie 3.1. piemēra 38. lpp., varam teikt, ka tur bija pieminēti četri dažādi izmēģinājumi ar, attiecīgi, 52, 4, 13 un 2 elementāriem notikumiem. Pēdējā gadījumā šie notikumi ir, ka izvilktā kārts ir dūzis un ka izvilktā kārts nav dūzis. Bet šie paši notikumi ir neelementāri, kad par iznākumu uzskatām katru atsevišķo kārti.

Tālāk raksturosim divus „galējus” notikumus, kādi atrodami jebkurā izmēģinājumā.

Notikumu sauc par *nenovēršamu*, ja tas notiek vienmēr, kad izpilda izmēģinājumu — tātad, ja tam labvēlīgi visi izmēģinājuma iznākumi.

Notikumu sauc par *neiespējamu*, ja tas nekad nenotiek, t.i., ja tam nav neviena labvēlīga iznākuma.

Piemēram, metot divus spēļu kauliņus, vienmēr uzkritušo punktu summa ir mazāka par 20. Katra izvilktā kārts no paciņas ir vai nu kreica, vai pīļa, vai erca, vai arī kārava masts kārts. Savukārt, nav iespējams, divus kauliņus metot, dabūt punktu summu 1, bet no kastītes izvilktā loze nevar vienlaikus būt pilna un tukša.

Ir skaidrs, ka izmēģinājumā ir tikai viens nenovēršams un viens neiespējams notikums. Apzīmēsim pirmo no tiem ar V , bet otro — ar Λ . Dažkārt V sauc arī par *pilno*, bet Λ — par *tukšo* notikumu. (Simbols Λ ir grieķu alfabēta lielais burts *Lambda*.) Savukārt *novēršami* notikumi (tādi, kam ir kāds nelabvēlīgs iznākums) un *iespējami* notikumi (tādi, kam ir kāds labvēlīgs iznākums) ir vairāki — ja vien kopā Ω ir vismaz divi elementi.

Tā kā, izpildot izmēģinājumu, vienmēr ir skaidrs jau iepriekš, kas notiks ar notikumiem V un Λ , tos abus var saukt par *noteiktiem* notikumiem. Visus pārējos notikumus (tādi vienmēr ir, ja ir vairāk nekā viens iespējamais iznākums) var saukt par *nenoteiktiem* jeb *nejaušiem*; dažreiz saka arī, ka tie ir gadījuma notikumi. Visbiežāk interesanti ir tieši tie.

Divi notikumi A un B (vienā un tai pašā izmēģinājumā) var būt, un var arī nebūt viens ar otru saistīti.

Teiksim, ka *no A izriet B* , ja B notiek katreiz, kad notiek A , un ka *A izslēdz B* , ja B nenotiek nekad, kad notiek A .

Detalizētāk: no A izriet B — tas nozīmē, ka katrs iznākums, kas labvēlīgs A , labvēlīgs arī B . Šai situācijā saka arī, ka A ir *B apakšnotikums* notikumam B . Ja divi notikumi noved viens pie otra, tad, kā redzējām, tie īstenībā ir vienādi. Tas, ka A izslēdz B , nozīmē, ka neviens iznākums, kas labvēlīgs A , nav labvēlīgs B . Viegli redzēt, ka ja A izslēdz B , tad arī B izslēdz A , tāpēc šai situācijā saka arī, ka notikumi A un B ir *nesavienojami* (savā starpā). Pretējā gadījumā saka, ka A un B ir *savienojami*. Citiem vārdiem sakot,

divi notikumi ir savienojami tad un tikai tad, ja ir kāds iznākums, kurš būtu labvēlīgs tiem abiem,

divi notikumi ir nesavienojami tad un tikai tad, ja nav neviena iznākuma, kurš būtu labvēlīgs tiem abiem.

3.3. PIEMĒRS. Piecdesmit divu iznākumu izmēģinājumā ar kārts izvilkšanu no paciņas apskatīsim šādus notikumus:

A : izvilkta kārts ir pīķis,

B : izvilkta melnas masts kārts,

C : izvilkta kārts ir kāravs,

D : izvilkta sarkanas masts kārts.

Tad no A izriet B (jo, kad izvilkts pīķis, tad ir izvilkta melna kārts), bet A izslēdz tiklab notikumu C , kā arī D (jo pīķa masts kārts nav kāravs un vispār nav sarkana kārts). B neizriet no A (ne vienmēr izvilkta melnas masts kārts ir pīķis). B un C ir nesavienojami (nav tādas kārts, kas vienlaikus būtu melnas masts un kāravs).

Tos pašus secinājumus iegūst arī, ja kārts izvēli uzskata par eksperimentu ar četriem iznākumiem (mastīm) — skat. 3.1. piemēru. ◀

3.4. PIEMĒRS. Ja metam divus kauliņus, tad notikumi $s > 4$ un s ir *skaitļa 6 pirmreizinātājs* izrādās nesavienojami. Ja vārdu 'pirmreizinātājs' aizvieto ar 'dalītājs', tad tādi notikumi kļūst savienojami. ◀

3. Atgriezīsimies vēlreiz pie 3.1. piemēra, kurā kārts vilkšanu no paciņas novērotājs varēja dažādi iedomāties par izmēģinājumu. Īsuma labad apzīmēsim tur aprakstītos izmēģinājumus attiecīgi ar α_{52} , α_4 , α_{13} un α_2 — vadoties pēc elementu skaita atbilstošajā iespējamo iznākumu kopā. Nav grūti ievērot, ka izmēģinājuma α_4 iespējami iznākumi (četras mastis) faktiski ir notikumi izmēģinājumā α_{52} , katrs ar 13 labvēlīgiem iznākumiem (kāršu nosaukumiem). Arī izmēģinājuma α_{13} visi iznākumi tāpat ir notikumi izmēģinājumā α_{52} ar 4 labvēlīgiem iznākumiem katrs. Šai nozīmē varam teikt, ka izmēģinājumi α_4 un α_{13} ir *atvasināti* no α_{52} . Arī α_2 ir atvasināts gan no α_{52} , gan tikpat labi no α_{13} .

Ievērosim, ka jebkuri divi dažādi atvasinātā izmēģinājuma iznākumi kā notikumi pamatzmēģinājumā izrādās nesavienojami. No otras puses, izdarot izmēģinājumu, vienmēr īstenojas kāds no atvasinātā izmēģinājuma iznākumiem. Mums būs noderīgi raksturot šādu situāciju vispārīgā veidā, bet tam nolūkam jāieved dažas arī pašas par sevi nozīmīgas definīcijas.

Pieņemsim, ka $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ir kaut kāda notikumu sistēma. Ja tie visi ir iespējami, bet jebkuri divi dažādi no tiem ir nesavienojami, saucim sistēmu \mathcal{A} par *gadījumu sistēmu*, bet pašus notikumus — par *gadījumiem*.

Gadījumu sistēmu saucim par *pilnu*, ja, izdarot izmēģinājumu, vienmēr kāds no šiem gadījumiem notiek (t.i., ja ikviens iespējamais iznākums ir labvēlīgs kādam no tiem).

Ievērosim, ka notikums saucams par gadījumu tikai salīdzinājumā ar citiem notikumiem no tās pašas sistēmas; ja izvēlas citu sistēmu, būs citi gadījumi. Tā, piemēram, izmēģinājumā α_{52} četri notikumi

izvilktā kārts ir kāravs, izvilktā kārts ir ercs, izvilktā kārts ir pīķis, izvilktā kārts ir kreics,

veido pilnu gadījumu sistēmu. Pilna ir arī divu notikumu sistēma — ka izvilkts dūzis un ka izvilktā kārts nav dūzis. Jebkurā izmēģinājumā visvienkāršākā pilnā sistēma sastāv tikai no viena notikuma V . Locekļu skaita ziņā pretstats ir visu elementāro notikumu sistēma.

Teiksim, ka izmēģinājums β ir *atvasināts* no izmēģinājuma α , ja pirmā izmēģinājuma β iznākumu kopa veido pilnu gadījumu sistēmu otrajā izmēģinājumā α .

Jāsaprot, ka, izdarot kādu izmēģinājumu, mēs īstenībā vienlaikus izdarām arī no tā atvasinātos izmēģinājumus. Piemēram, izvelkot kārti no paciņas, nosakām, kura kārts ir izņemta (tas ir iepriekš minētais izmēģinājums α_{52}), bet

vienlaikus nosakām vienu no mastīm (t.i., realizējas α_4), vienu no numuriem (realizējas α_{13}) un arī vai izņemtā kārts ir dūzis (tas ir α_2).

Piezīme. Atvasināta izmēģinājuma jēdziens būs nepieciešams vienīgi šī paragrāfa pēdējā paragrāfā. Citur tas parādīsies tikai epizodiski. Taču gadījumu sistēmas (tai skaitā pilnas) jēdziens gan būs jāatceras bieži.

3.3. Notikumu algebra

1. Tagad iepazīsimies ar dažām darbībām, ko var izpildīt ar notikumiem, katreiz rezultātā iegūstot atkal kādu notikumu.

Par notikumu A un B *apvienojumu* sauc tādu notikumu $A \cup B$, kurš notiek tad un tikai tad, kad notiek vismaz viens (vienalga, kurš) no abiem notikumiem A un B .

Par A un B *šķēlumu* sauc tādu notikumu $A \cap B$, kurš notiek tad un tikai tad, kad notiek abi notikumi A un B .

Par A un B *starpību* sauc tādu notikumu $A - B$, kurš notiek tad un tikai tad, kad A notiek, bet B nenotiek.

Par A *papildinājumu* sauc tādu notikumu \bar{A} , kurš notiek tad un tikai tad, kad A nenotiek.

Bieži notikuma papildinājumu sauc arī par tam *pretējo* notikumu. Ja jau iepriekš zināms, ka notikumi A un B nav savienojami, tad to apvienojumu dažkārt sauc arī par *summu* un apzīmē ar $A + B$.

3.5. PIEMĒRS. Atkal atgriezīsimies pie izmēģinājuma α_{52} ar kārts vilkšanu. Ņemsim divus notikumus:

A : *izvilka erca masts kārts*, B : *izvilka bildes kārts*

(par bildes kārtīm uzskatīsim kalpus, dāmas un kungus). Tad notikums, ka izvilka erca masts bildes kārts, ar 3 labvēlīgiem iznākumiem ir A un B šķēlums. Notikums, ka izvilka erca masts vai bildes kārts, (kur netiek izslēgtas kārtis, kas atbilst abām prasībām) ir A un B apvienojums, un tam labvēlīgi ir 22 iznākumi — visas erca masts kārtis (to ir 13) un vēl visas bilžainās citu mastu kārtis (to ir 9). A un B starpība ir notikums, ka izvilka erca masts, bet ne bildes kārts, un tam ir desmit labvēlīgu iznākumu. Bet notikums, ka izvilktā kārts nav ercs (ar 39 labvēlīgiem iznākumiem) ir A papildinājums.

Bez tam notikums B ir triju dabisku notikumu summa: tie ir notikumi, ka izvilkts kungs, izvilka dāma, izvilkts kalps. ◀

3.2. VINGRINĀJUMS. Pārlicinieties, ka patvaļīgs izmēģinājuma iznākums ir

- labvēlīgs notikumam $A \cup B$ tad un tikai tad, kad tas labvēlīgs vismaz vienam no notikumiem A un B ,
- labvēlīgs notikumam $A \cap B$ tad un tikai tad, kad tas labvēlīgs reizē abiem notikumiem A un B ,
- labvēlīgs notikumam $A - B$ tad un tikai tad, kad tas ir labvēlīgs notikumam A un nelabvēlīgs B ,
- labvēlīgs \bar{A} tad un tikai tad, ja tas nav labvēlīgs A . ◀

Piezīme. Šai vingrinājumā norādītie darbību ar notikumiem raksturojumi parocīgi arī praktiskai izmantošanai. Bez tam tie dod zināmu motivāciju definīcijā pieņemtajiem darbību nosaukumiem un apzīmējumiem. Piem., notikuma $A \cup B$ labvēlīgo iznākumu kopa nav nekas cits kā A un B labvēlīgo iznākumu kopu Ω_A un Ω_B apvienojums. Līdzīgi ir arī ar pārējām operācijām. Tāpēc dažkārt notikumu un tā labvēlīgo iznākumu kopu nešķiro, uzskata par vienu un to pašu objektu. Tas mazliet atvieglo formulējumus un vienkāršo pierakstu simbolos, bet ne visai saskaņojas ar mūsu intuīciju. Mēs turpmākajā to nedarīsim. ◀

3.3. VINGRINĀJUMS. Aplūkosim vēlreiz to pašu izmēģinājumu α_{52} ar kārtīm. Apzīmēsim ar M_i , kur i ir viens no simboliem $\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$, notikumu, ka izvilktā i masts kārts, bet ar N_j , kur j ir viens no skaitļiem $1, 2, \dots, 13$, notikumu, ka izvilktā kārts ir ar numuru j (dūzim $j = 1$, divniekam $j = 2$, trijniekam $j = 3, \dots$, desmitniekam $j = 10$, kalpam $j = 11$, dāmai $j = 12$, kungam $j = 13$).

1) Pēc iespējas vienkāršāk aprakstiet vārdiem šādus notikumus:

- (a) $M_{\spadesuit} \cap N_{12}$, (b) $M_{\spadesuit} \cup M_{\clubsuit}$, (c) $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, (d) $N_1 \cup M_{\clubsuit}$,
(e) $M_{\spadesuit} \cap (N_{11} \cup N_{12} \cup N_{13})$, (f) $N_1 \cap M_{\clubsuit}$, (g) $N_1 - M_{\clubsuit}$, (h) $M_{\clubsuit} - N_1$,
(j) $\overline{M_{\diamond} \cup M_{\heartsuit}}$, (i) $M_{\diamond} \cap M_{\clubsuit}$, (k) $\overline{M_{\diamond} \cup M_{\heartsuit}}$.

Saskaitiet katram no tiem labvēlīgos iznākumus.

2) Lietojot pieņemtus apzīmējumus un izmantojot četras tagad jau zināmās operācijas, pierakstiet ar simboliem šādus notikumus: izvilktā kārts (a) ir pīķa vai erca trijnieks, (b) ir erca trijnieks vai kreica dūzis, (c) ir sarkanais masts kārts ar trim, četriem vai pieciem punktiem, (d) nav vienlaikus pīķa un erca masts, (e) nav melnais masts dūzis, (f) nav ne dūzis, ne dāma, (g) nav septītnieks vai ir kāravs, (h) ir bildes kārts, taču ne kāravs.

ATBILDES. 1) Izvilka (a) pīķa dāma, 1, (b) melna kārts, 26, (c) kārts ar ne vairāk par četriem punktiem, 16, (d) kārts, kas ir dūzis vai kreics, 16, (e) bilžaina pīķa kārts, 3, (f) kreica dūzis, 1, (g) dūzis, bet ne kreica, 3, (h) kreics, kas nav dūzis, 12, (i) reizē kāravs un kreics, 0, (j) kārts, kas nav ne kāravs, ne ercs (jeb nav sarkana kārts), 26, (k) kārts, kas nav kāravs vai nav ercs (nenovēršams notikums), 52.

2) (a) $(M_{\spadesuit} \cup M_{\heartsuit}) \cap N_3$, (b) $(M_{\heartsuit} \cap N_3) \cup (M_{\clubsuit} \cap N_1)$, (c) $(M_{\heartsuit} \cup M_{\diamondsuit}) \cap (N_3 \cup N_4 \cup N_5)$, (d) $\overline{M_{\spadesuit} \cap M_{\heartsuit}}$, (e) $(M_{\spadesuit} \cup M_{\clubsuit}) \cap N_1$, (f) $\overline{N_1} \cup \overline{N_{12}}$ jeb $\overline{N_1} \cap \overline{N_{12}}$, (g) $\overline{N_7} \cup M_{\diamondsuit}$, (h) $(N_{11} \cup N_{12} \cup N_{13}) - M_{\spadesuit}$. ◀

Nobeidzot paragrāfu atzīmēsim vēl dažus viegli pārbaudāmus faktus, kurus vēlāk lietošim bez īpaša atgādinājuma.

3.4. VINGRINĀJUMS. Izmantojot 3.2. vingrinājuma rezultātus, pārliecinieties, ka

- (a) A nav savienojams ar B tad un tikai tad, ja $A \cap B = \Lambda$,
- (b) no A seko B tad un tikai tad, ja $A \cup B = B$,
- (c) no A seko B tad un tikai tad, ja $A \cap B = A$,
- (d) $A \cap B$ un $A - B$ nav savienojami,
- (e) $A - B = A \cap \overline{B}$,
- (f) $\overline{A} = V - A$. ◀

3.4. Notikumu novērtēšana: to apjomi un varbūtības

Mūsu vērojumi 1. nodaļā rāda, ka kāda notikuma iespējamību var skaitliski raksturot ar tam labvēlīgo iznākumu skaitu vai arī ar tā notikšanas varbūtību. Šai paragrāfā apspriedīsim šādus vērtējumus vispārīgā veidā. Kā parasti, pieņemsim, ka ir fiksēts kāds izmēģinājums. Tā iespējamo iznākumu skaitu apzīmēsim ar n .

1. Sāksim ar ne visai izplatītu, bet noderīgu definīciju.

Notikumam labvēlīgo iznākumu skaitu sauksim par tā *apjomu*. Patvaļīga notikuma A apjomu apzīmēsim ar $N(A)$.

Nav grūti redzēt, ka ir spēkā šādas sakarības, kurās A un B ir patvaļīgi notikumi (saīsinājums 't.t.t.' nozīmē 'tad un tikai tad').

N1: $0 \leq N(A) \leq n$,

N2: $N(A) = 0$ t.t.t., ja $A = \mathbf{V}$,

N3: $N(A) = n$ t.t.t., ja $A = \mathbf{\Lambda}$,

N4: ja no A izriet B , tad $N(A) \leq N(B)$,

N5: ja A un B ir savienojami, tad $N(A) + N(B) \leq n$.

N6: A un B nav savienojami t.t.t., ja $N(A \cap B) = 0$.

3.5. VINGRINĀJUMS. Izdomājiet pretpiemērus, kas rāda, ka sakarības N4 un N5 nav apgriežamas. Proti, izdomājiet izmēģinājumu un norādiet tajā divus notikumus A un B tā, ka $N(A) \leq N(B)$, bet tomēr no A neizriet B . Līdzīgi, izdomājiet izmēģinājumu un norādiet tajā notikumus A un B tā, lai A un B būtu nesavienojami, bet tomēr $N(A) + N(B) \leq n$. ◀

Pirms turpinām, atcerēsimies jau 1.1. paragrāfā apskatītu piemēru.

3.6. PIEMĒRS. Ir zināms, ka ekskursantu grupā, kas dodas ārzemju braucienā, divpadsmit prot angļu, bet septiņi — vācu valodu. Turklāt trīs ir tādi, kas prot abas šīs valodas. Cik īsti ir to, kuri prot vismaz vienu no šīm valodām?

Protams, ka atbilde „deviņpadsmit”, ko dabū saskaitot divpadsmit ar septiņi, ir nedaudz pārspīlēta: tā būsīm divreiz uzskaitījuši tos trīs, kuri prot abas valodas. Pareizā atbilde ir „sešpadsmit”. ◀

Glūzi tāpat spriežot, var pārlicināties, ka ir spēkā pirmā no četrām nākošajām sakarībām.

N7: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$,

N8: ja A un B nav savienojami, tad $N(A + B) = N(A) + N(B)$,

N9: $N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$,

N10: $N(\bar{A}) = n - N(A)$.

Vienādība N8, ko parasti sauc par (*apjomu*) *saskaitīšanas likumu* ir nevis N7 pretstats, bet sekas (skat. N6). Patiesībā tā ir citā veidā uzrakstīts mums jau no 7. lpp. pazīstamais saskaitīšanas princips. Tiešām, ja α nozīmē, ka izvēlas notikumam A , bet β — notikumam B labvēlīgu izmēģinājuma iznākumu, tad $k = N(A)$, bet $l = N(B)$. Norādījums 'citos veidos' principa tekstā nozīmē, ka A izslēdz B . Savukārt, izvēle „ α vai β ” tad nozīmē labvēlīga iznākuma izvēli notikumam $A + B$.

N7 kopā ar N6 ļauj apgalvot pat vairāk:

Notikumi A un B ir nesavienojami t.t.t., ja $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.

Vienādību N9 var, izmantojot 3.2. vingrinājumu, pārbaudīt tieši, bet var arī izsecināt no iepriekšējām. Vispirms, notikumi $A \cap B$ un $A - B$ ir acīmredzami nesavienojami, bet $(A \cap B) + (A - B) = A$. Tad N8 dod, ka $N(A) = N(A \cap B) + N(A - B)$. Vienādība N10 ir acīmredzama, bet to var dabūt arī kā N9 sekas, ja ņem vērā N3.

2. Parādīsim, kā apskatītās apjomu īpašības var izmantot aprēķinos.

3.7. PIEMĒRS. Izdarot aptauju 100 cilvēku lielā grupā, noskaidrojās, ka no tiem 50 prot angļu valodu, 40 — krievu valodu, 55 — vācu valodu, bet 6 cilvēki neprot nevienu no šīm svešvalodām. Pie tam, 20 no tiem, kas prot angļu, prot arī vācu, un 23 — krievu valodu, bet vācu un krievu prot 7 no aptaujātajiem.

Vēlāk radās aizdomas, ka šie dati nav pareizi. Vai to var apstiprināt ar kādiem aprēķiniem ?

Mēs drīkstam iedomāties, ka mums ir izmēģinājums ar 100 iznākumiem, kurā aptaujāšanai patvaļīgi izvēlas jebkuru pārstāvi no minētās grupas. Apzīmēsim ar A , K un V notikumus, ka tāds aptaujātais prot attiecīgi angļu, krievu vai vācu valodu. (Nejauksim šo V ar nenovēršamo notikumu V .)

Ar X apzīmēsim notikumu, ka aptaujātais neprot nevienu no trijām svešvalodām. Acīmredzot, $X = \bar{A} \cap \bar{K} \cap \bar{V}$.

Uzdevumā teikts, ka $N(X) = 6$. Nav grūti saprast, ka notikums X ir papildinājums notikumam Y , ka aptaujātais prot vismaz vienu svešvalodu. Tad pēc N10 dabūjam, ka $N(Y) = 94$.

Bet $Y = A \cup K \cup V$. Iedomāsimies apvienojumu $A \cup K$ kā vienu vienotu notikumu (ka aptaujātais prot vismaz angļu vai krievu valodu). Tad, ņemot vērā arī N7 (kur A lomā ir $A \cup K$, bet B lomā — V),

$$94 = N(A \cup K \cup V) = N((A \cup K) \cup V) = N(A \cup K) + N(V) - N((A \cup K) \cap V).$$

Vēlreiz lietosim N7:

$$N(A \cup K) = N(A) + N(K) - N(A \cap K) = 50 + 40 - 23 = 67.$$

No šejienes

$$N((A \cup K) \cap V) = 67 + 55 - 94 = 28.$$

Pārdomājot, ko nozīmē kreisajā pusē esošais notikums $(A \cup K) \cap V$ (nejaušs aptaujātais zina vācu valodu un vēl vismaz vienu no divām — angļu vai krievu), redzēsim, ka tas izpildās tādā un tikai tādā gadījumā, kad aptaujātais prot

angļu un vācu valodu vai, ja nē, tad krievu un vācu valodu; citiem vārdiem sakot, ja izpildās notikums $(A \cap V) \cup (K \cap V)$. Atkal ņemot vērā N7, dabūjam:

$$\begin{aligned} 28 &= N((A \cap V) \cup (K \cap V)) = \\ &= N(A \cap V) + N(K \cap V) - N((A \cap V) \cap (K \cap V)) = \\ &= 20 + 7 - N((A \cap K \cap V)). \end{aligned}$$

Tādejādi, $N(A \cap K \cap V) = -1$, kas, protams, nav iespējams. Tas nozīmē, ka izmantotie dati tiešām ir kļūdaini. ◀

3.8. PIEMĒRS. *Pēc anketu pārbaudes izrādījās, ka iepriekšējā piemērā minētajos skaitļos ieviesusies vienkārša drukas kļūda: vācu un krievu valodu īstēnībā prot nevis 7, bet 17 aptaujātie. Ko papildus aprēķini var dot šādā gadījumā?*

Koriģējot iepriekšējā piemēra aprēķinus, dabūsim, ka tagad $N(A \cap K \cap V) = 9$, t.i., deviņi aptaujātie prot visas trīs svešvalodas.

Var uzzināt, cik ir tādu, kas prot vācu, bet neprot krievu valodu. Tas ir skaitlis $N(V - K)$. Pēc N9 dabūjam, ka

$$N(V - K) = N(V) - N(N \cap K) = 55 - 17 = 38.$$

Līdzīgi, prot vācu, bet ne angļu valodu 35 aptaujātie.

Tagad noskaidrosim, cik aptaujāto prot tikai vācu valodu, citiem vārdiem, kāds ir apjoms notikumam $V \cap \overline{A \cup K}$ jeb, kas ir tas pats, notikumam $V - (A \cup K)$. Jau iepriekšējā piemērā atradām, ka $N(V \cap (A \cup K)) = 28$ (bijusī kļūda šo rezultātu neskar). Tātad, pēc N9,

$$N(V - (A \cup K)) = N(V) - N(V \cap (A \cup K)) = 55 - 28 = 27.$$

To skaits, kuri prot krievu un vācu, bet ne angļu valodu, ir

$$N((K \cap V) - A) = N(K \cap V) - N(K \cap V \cap A) = 17 - 9 = 8.$$

Līdzīgi, to, kuri prot angļu un vācu, bet neprot krievu valodu, ir 11. ◀

3.6. VINGRINĀJUMS. Padomājiet, kādas vēl šo valodu prasānas vai neprāšanas kombinācijas iespējamās, un nosakiet attiecīgos pratēju skaitus. ◀

3. Tāpat kā saskaitīšanas princips, arī apjomu saskaitīšanas likums ir vispārināms vairāk nekā diviem notikumiem. Nākamais piemērs apstiprina dabīgu minējumu, ka saskaitīšanas likums varētu būt spēkā vairāk nekā diviem notikumiem. Mēs jau esam izmantojuši šādu piemēru.

3.9. PIEMĒRS. Veikalā īsi pirms slēgšanas palikuši 7 kukuliši Borodinas maizes, 5 kukuliši saldskābmaizes, 4 kukuliši klona maizes un 8 baltmaizes batori. Cik liela ir izvēle pircējam, kurš pēc maizes iesteidzas veikalā pēdējā brīdī?

Tā kā visas četras maizes šķirnes ir dažādas, varam saskaitīt dažādu šķirņu kukulišu skaitu. Tas nozīmē, ka pircējs var izvēlēties vienu no 24 kukulišiem. Piemetināsim vienīgi, ka šī situācija ir aprakstāma izmēģinājumu un notikumu valodā. Uzskatīsim par izmēģinājumu kādas gabalpreces pirkšanu veikalā un par iespējamo iznākumu kopu — visu nopērkamo gabalpreču kopu. Mūs interesē notikums, ka pircējs nopircis vienu maizes kukuli. Šim notikumam ir četri gadījumi: nopirkts ir kukulis Borodinas, saldskābās, klona maizes vai baltmaizes. Ievērosim, ka jebkuri divi (dažādi) no šiem četriem apakšnotikumiem ir savstarpēji nesavienojami. Mūs interesējošajam notikumam (kurš ir visu četru gadījumu apvienojums) labvēlīgo iznākumu skaitu (24) dabūjam, saskaitot labvēlīgo iznākumu skaitus četriem gadījumiem. ◀

Lai aprakstītu šos apsvērumus vispārīgā veidā, ir noderīgi ievest vēl vienu dabisku palīgiedzieni, ko izmantosim arī turpmāk.

Teiksim, ka kāds notikums A ir *sadalāms* gadījumos A_1, A_2, \dots, A_m , ja $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ir gadījumu sistēma (skat. 2. paragrāfa beigās 43. lpp.) un pie tam $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$. Šādā situācijā katru gadījumu A_i sauksim par *notikuma* A gadījumu.

Atbilstoši notikumu apvienojuma definīcijai, vienādība $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ nozīmē, ka A notiek tad un tikai tad, kad notiek kāds no gadījumiem A_i . Protams, ka vairāki gadījumi reizē nevar īstenoties.

Tagad varam N8 vispārināt sekojoši.

VISPĀRĪGAIS APJOMU SASKAITĪŠANAS LIKUMS: Ja notikums A ir sadalāms gadījumos A_1, A_2, \dots, A_m , tad $N(A) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_m)$.

Mēs tiešām dabūsim N8 kā šī likuma speciālgadījumu, ja ievērosim, ka nesavienojamiem A un B kopa $\{A, B\}$ ir notikuma $A+B$ sadalījums gadījumos (pieņemot, ka notikumi A un B abi ir iespējami! Taču ja kāds no tiem, vai pat abi, ir neiespējami, tad N2 dēļ sakarība N8 kļūst par trivialitāti.).

4. Jautājumi, kas tika apskatīti līdz šim šai paragrāfā — un pat nodaļā — bija tīri kombinatoriskas dabas. Tagad pievērsīsimies notikumu varbūtībām.

Mēs jau ievadā mēģinājām novērtēt notikuma iespējamību ar skaitli, kurš rāda, kādu daļu no iespējamiem izmēģinājuma iznākumiem veido tie, kas labvēlīgi apskatāmajam notikumam. Bet mēs arī redzējām, ka tāds iespējamības mērs, ko nosaucām par notikuma varbūtību, sevi attaisno vienīgi tad,

ja ir pamats domāt, ka visi izmēģinājuma iznākumi ir vienlīdz iespējami. Šai punktā iepazīsimies ar šādi definētu varbūtību īpašībām. Tās izrādīsies radniecīgas iepriekšējā punktā noskaidrotajām notikumu apjomu īpašībām.

Par patvaļīga notikuma A klasisko varbūtību sauc skaitli, kurš rāda, kāda daļa no izmēģinājumā iespējamiem iznākumiem ir labvēlīga A .

Apzīmēsim šo skaitli ar $P(A)$; tātad $P(A) = \frac{N(A)}{n}$.

Piemērojot šo definīciju elementāriem notikumiem, ievērosim, ka

katra atsevišķā iznākuma klasiskā varbūtība ir $\frac{1}{n}$.

Tas vēlreiz pasvīturo, ka klasiskās varbūtības jēdziens lietojams vienīgi, ja visiem izmēģinājuma iznākumiem ir vienādas iespējas parādīties. Ja to atceras, tad var arī atbilst apzīmētāju *klasiskā*. (Atgādināsim arī pirmā paragrāfa beigās pārrunāto, ka izmēģinājuma iznākumu kopā Ω nav „neiespējamu” iznākumu.)

3.10. PIEMĒRS. Atcerēsimies pirmā nodaļas izmēģinājumu — divu dažādu spēļu kauliņu mešanu ar 36 iespējamiem iznākumiem. Tur mēs redzējām, ka iespējamās 11 dažādas uzkrītošo punktu summas s . 1. tabulā redzams, kādas ir šīs summas dažādiem metiena iznākumiem. Apzīmēsim ar A_s , kur

1. tabula: punktu summu biežumi

		2. kauliņš					
		1	2	3	4	5	6
1. kauliņš	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$s = 2, 3, \dots, 12$, notikumu, ka minēta summa ir s . Redzams, ka, piem., A_4 ir ar trim, bet A_7 — ar sešiem labvēlīgiem iznākumiem. Notikumu A_s varbūtības sakopotas 2. tabulā parasta daļskaitļa un decimālā formā.

3.11. PIEMĒRS. *Kastītē ir k baltas un l melnas bumbiņas. Apsvērsim šādus jautājumus.*

- (a) *No kastītes uz labu laimi izņem vienu bumbiņu. Kāda ir varbūtība, ka tā būs balta? melna?*

2. tabula: notikumu A_s varbūtības

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(A_s)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36
	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

- (b) *No kastītes uz labu laimi izņem vienu bumbiņu un atliek malā. Šī bumbiņa izrādas balta. Kāda ir varbūtība, ka nākošā arī būs balta? melna?*
- (c) *No kastītes uz labu laimi izņem vienu bumbiņu un, neapskatot, atliek malā. Kāda ir varbūtība, ka nākošā bumbiņa būs balta?*
- (d) *No kastītes citu aiz citas izņem visas bumbiņas. Kāda ir varbūtība, ka pēdējā no tām būs balta?*
- (e) *No kastītes uz labu laimi izņem vienu bumbiņu un atliek malā. Pēc tam izņem vēl vienu bumbiņu; tā izrādās balta. Kāda ir varbūtība, ka arī pirmā bija balta?*

(a) Ir skaidrs, ka te ir izmēģinājums ar $k + l$ iznākumiem un ka tie visi ir vienlīdz iespējami. Mūs interesējošos notikumus, ka izņemtā bumbiņa ir balta un ka tā ir melna, apzīmēsim attiecīgi ar A un ar B . Notikumam A ir k labvēlīgi iznākumi, tāpēc meklētā varbūtība $P(A)$ ir $\frac{k}{k+l}$. Līdzīgi $P(B) = \frac{l}{k+l}$.

(b) Šoreiz izmēģinājums īstenībā sākas tikai pēc pirmās bumbiņas atlikšanas, un tam ir vairs tikai $k + l - 1$ iznākums. Tāpēc arī vērtējamie notikumi šoreiz ir citi (kaut uzdotie jautājumi skan vienādi!). Ja apzīmē tos ar A' (bumbiņa balta) un B' (bumbiņa melna), tad $P(A') = \frac{k-1}{k+l-1}$, bet $P(B') = \frac{l}{k+l-1}$.

(c) Bieži vien pirmā atbilde, kas (b) piemēra iespaidā ienāk prātā, skan apmēram tā: „Varbūtība, ka otrā bumbiņa būs balta ir $\frac{k-1}{k+l-1}$, ja malā atliktā bumbiņa ir balta, un $\frac{k}{k+l-1}$, ja tā izrādās melna”. Taču šis novērtējums ir neapmierinošs kaut vai tādēļ, ka dod nenoteiktu atbildi uz jautājumu par pilnīgi noteikta notikuma varbūtību. Pati ideja, ka jāreķinās ar pirmās bumbiņas krāsu, gan nav gluži nederīga, un pie tās atgriezīsimies nedaudz vēlāk.

Dabūt pareizu atbildi var arī uzreiz, kaut spriedumi, ar kuriem to iegūsim, dažreiz pirmajā brīdī šķiet apšaubāmi. Proti, varbūtība, ka otrā bumbiņa būs balta, ir tas pats jau no (a) pazīstamais skaitlis $\frac{k}{k+l}$!

Salīdzināsim (c) un (a) piemērus un mēģināsim saprast, ka būtībā abos gadījumos mums ir darīšana ar vienu un to pašu izmēģinājumu ar $k + l$ iznākumiem; atšķirīga ir tikai apskatāmās bumbiņas izņemšanas procedūra. Mēs varam domāt, ka (a) piemērā tika izņemta pirmā pie rokas pagādījušies bumbiņa, bet (c) piemērā pirmo pagādījušos noraidām (pastumjam to sāņus vai izņemam

pavisam ārā — tas nav būtiski), un meklējam citu. Tātad galu galā abas reizes apskatei tiek izraudzīta viena no $k + l$ bumbiņām.

Šāds spriedums dažkārt tomēr izsauc iebildumus, piemēram — bet tomēr kastītē taču bija palicis par vienu bumbiņu mazāk. Taču apskatāmās otrās bumbiņas lomā iespējams nokļūt ikvienai no sākumā kastītē esošajām, un nevienai bumbiņai, kopumā ņemot, šī iespēja nav ne lielāka, ne mazāka kā citām (t.i., saglabājas arī motivējums lietot klasiskās varbūtības definīciju).

Ja lasītājam joprojām šķiet, ka viņš tiek mānīts, tad viņam varētu noderēt šāds ievērojami atšķirīgs skatījums uz notiekošo.

Domāsim par divu bumbiņu izņemšanu no kastītes kā par patstāvīgu izmēģinājumu, kura iznākumi ir bumbiņu pāri. Tā kā abu bumbiņu lomas ir atšķirīgas, un tā kā pirmo izņemto atpakaļ neliek, mums ir darīšana ar sakārtotiem pāriem bez atkārtojumiem, un to skaits ir A_{k+l}^2 jeb $(k + l)(k + l - 1)$. Nav nekādu iemeslu tam, ka kāds pāris būtu īpašā stāvoklī — tiem visiem ir vienādas iespējas būt izņemtiem, tāpēc šai izmēģinājumā var lietot klasiskās varbūtības.

Mūs interesē notikums (apzīmēsim to ar A''), ka pāri otrā bumbiņa ir balta; saskaitīsim tam labvēlīgos iznākumus. Protams, to pāru, kuros otrā bumbiņa ir balta, ir tieši tikpat, cik to pāru, kuros balta ir pirmā bumbiņa (vajag katrā pāri bumbiņas samainīt vietām). Pirmo baltu var paņemt k veidos, katrai pirmajai bumbiņai var piedroties ikviena no atlikušajām $k + l - 1$, tāpēc $N(A'') = k(k + l - 1)$. (To pašu rezultātu dabū, ja saskaita tos pārus, kuros abas bumbiņas ir baltas, un arī tos, kuros pirmā bumbiņa melna, bet otrā balta — kopā tas ir $k(k - 1) + lk$.) Tātad

$$P(A'') = \frac{k(k + l - 1)}{(k + l)(k + l - 1)} = \frac{k}{k + l}$$

— kā jau bija izspriests iepriekš.

Izskatīsim vēl vienu paņēmieni, kā atrast atbildi uz šo pašu jautājumu. Paļausimies uz lasītāja izpratni, ka šis paņēmieni ir „saprātīgs”; stingru pamatojumu varēsīm dot tikai nākamajā nodaļā, kad runāsim par nosacītajām varbūtībām.

Acīmredzot (to ievērojām jau pašā sākumā), varbūtība otrajai bumbiņai būt baltai ir $\frac{k-1}{k+l-1}$, ja malā atliktā ir balta, un $\frac{k}{k+l-1}$, ja tā ir melna. Ja abas šīs iespējas būtu vienlīdz ticamas, mums būtu pamats par meklēto varbūtību ņemt abu šo „nosacīto” varbūtību vidējo aritmētisko, t.i., to summas pusi. Īstenībā abu iespēju ticamība atkarīga nokonkrētām k un l vērtībām. Ja, piem., balto bumbiņu būtu jūtami vairāk nekā melno, vajadzētu pirmajai nosacītajai varbūtībai $\frac{k-1}{k+l-1}$ piešķirt lielāku svaru nekā otrajai. Bet no (a) jau zinām varbūtības pirmajai izņemtajai bumbiņai būt baltai vai melnai; ņemsim tās kā izsvārojošus koeficientus un aprēķināsim abu nosacīto varbūtību *izsvērto*

vidējo, kas tad būtu meklētā varbūtība:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{k+l} \cdot \frac{k-1}{k+l-1} + \frac{l}{k+l} \cdot \frac{k}{k+l-1} = \\ & = \frac{k(k-1) + kl}{(k+l)(k+l-1)} = \frac{k(k+l-1)}{(k+l)(k+l-1)} = \frac{k}{k+l}. \end{aligned}$$

Piemetināsim tikai, ka abi svara koeficienti tiešām kļūst vienādi ar $\frac{1}{2}$, kad $k = l$.

(d) Arī šis piemērs ir tikai variācija par to pašu tēmu. Iedomājieties, ka kāds, lai tiktu pie jau nolūkotās bumbiņas, vispirms izņem pārējās tāpēc, ka tās traucē. Atbilde ir $\frac{k}{k+l}$.

(e) Šis piemērs savukārt būtiski neatšķiras no (b), un meklētā varbūtība ir $\frac{k-1}{k+l-1}$. Neatkarīgi no (b) varam spriest šādi.

Izmantosim nupat aprakstīto izmēģinājumu ar divu bumbiņu ņemšanu. Mēs jau zinām, ka ir $k(k+l-1)$ tādu pāru, kuros otrā bumbiņa ir balta. Kādu daļu no tiem sastāda tie pāri, kuros arī pirmā bumbiņa ir balta (t.i., abas ir baltas)? Tādu pāru ir tikai A_k^2 jeb $k(k-1)$, tāpēc mūs interesējošā (klasiskā) varbūtība ir $\frac{k(k-1)}{k(k+l-1)}$ jeb $\frac{k-1}{k+l-1}$.

Šo spriedumu var pielāgot arī (b) gadījumam.

ATBILDE: (a) $\frac{k}{k+l}$ un $\frac{l}{k+l}$, (b) $\frac{k-1}{k+l-1}$ un $\frac{l}{k+l-1}$, (c) $\frac{k}{k+l}$, (d) $\frac{k}{k+l}$, (e) $\frac{k-1}{k+l-1}$. ◀

3.7. VINGRINĀJUMS. *Vai jūs apskatītajā piemērā baltās, tāpat arī melnās bumbiņas uzskatījāt par vienādām, dažādām vai nepievērsāt tam uzmanību? Cik tas ir būtiski?*

3.12. PIEMĒRS. *Kastītē ir k baltas un l melnas bumbiņas, visas dažādas. No kastītes izņēma r bumbiņas. Kāda varbūtība, ka tās visas ir baltas?*

Protams, ja $r > k$, tad meklētā varbūtība ir 0. Paliksim pie pretējā gadījuma, kad $r \leq k$.

Izmēģinājums ir r bumbiņu izņemšana no kastes; tam ir C_{k+l}^r iznākumu (kāpēc?). Mūs interesē notikums, ka visas izņemtās bumbiņas ir baltas, tam labvēlīgi ir vairs tikai C_k^r iznākumi. Visām bumbiņām tiek domāta vienāda iespēja būt starp izņemtajām, līdz ar to ikvienam r bumbiņu komplektam ir tādas pat izredzes tikt izņemtām kā ikvienam citam. Tāpēc lietojam klasisko varbūtības definīciju, un meklētā varbūtība ir $\frac{C_k^r}{C_{k+l}^r}$.

Tā kā runa ir tikai par to, ka izņemtās bumbiņas ir vienādas krāsas, šķiet, ka bumbiņu izņemšanas secībai nevajadzētu būt svarīgai. Un tiešām, ja mēs kombināciju vietā tomēr būtu ņemuši variācijas, līdzīgi spriežot, dabūtu varbūtību $\frac{A_k^r}{A_{k+l}^r}$. Bet īpašība K9 rāda, ka tas ir tas pats skaitlis.

ATBILDE: $\frac{C_k^r}{C_{k+l}^r}$ jeb $\frac{A_k^r}{A_{k+l}^r}$ ◀

3. Paturot prātā, kā aprēķina varbūtību $P(A)$, no īpašībām N1–N10 uzreiz iegūstam šādus to dubultniekus:

$$P1: 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$P2: P(A) = 0 \text{ t.t.t., ja } A = \Lambda,$$

$$P3: P(A) = 1 \text{ t.t.t., ja } A = \mathbf{V},$$

$$P4: \text{ja no } A \text{ izriet } B, \text{ tad } P(A) \leq P(B),$$

$$P5: \text{ja } A \text{ un } B \text{ ir savienojami, tad } P(A) + P(B) \leq 1.$$

$$P6: A \text{ un } B \text{ nav savienojami t.t.t., ja } P(A \cap B) = 0$$

$$P7: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P8: \text{ja } A \text{ un } B \text{ nav savienojami, tad } P(A + B) = P(A) + P(B),$$

$$P9: P(A - B) = P(A) - P(A \cap B),$$

$$P10: P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Piem., ja no A izriet B , tad (pēc N4)

$$P(A) = \frac{N(A)}{n} \leq \frac{N(B)}{n} = P(B),$$

ar ko ir pierādīta īpašība P4. Bet no N7, izdalot abas puses ar n , dabū P7:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{n} = \frac{N(A)}{n} + \frac{N(B)}{n} - \frac{N(A \cap B)}{n} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Līdzīgi pamatojamas arī pārējās sakarības.

Vienādību P7 sauc par *varbūtību saskaitīšanas likumu*. Tāpat kā apjomu gadījumā,

$$\text{notikumi } A \text{ un } B \text{ ir nesavienojami t.t.t., ja } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Savs līdzinieks ir arī vispārinātajam apjomu saskaitīšanas likumam. Atcerēsimies, ka (pēc definīcijas) notikuma gadījumi ir pa pāriem nesavienojami.

VISPĀRĪGAIS VARBŪTĪBU SASKAITĪŠANAS LIKUMS: Ja notikums A ir sadalāms gadījumos A_1, A_2, \dots, A_m , tad $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$.

Tāpat kā tas bija ar N8 pie apjomu saskaitīšanas, P8 ir vispārīgā likuma speciālgadījums, par ko var līdzīgi pārliecināties.

Ikvienu no Λ atšķirīgu notikumu var sadalīt arī elementāros gadījumos (atgādne: par elementāru pirmā paragrāfa otrā punkta sākumā nosaucām notikumu, kam ir tikai viens labvēlīgs iznākums). Tad kā sekas no vispārīgā varbūtību saskaitīšanas likuma dabūjam:

Ja $A \neq \Lambda$, tad notikuma A varbūtība ir vienāda ar visu tam labvēlīgo iznākumu varbūtību summu.

Tiesām, ja $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ ir A labvēlīgie iznākumi, tad $k = N(A)$ un

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_k) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{N(A)}{n}$$

(ω ir grieķu alfabēta mazais burts, kuru lasa 'omega').

3.13. PIEMĒRS. Atgriezīsimies pie 3.7. un 3.8. vingrinājuma (ar izlabotajiem datiem). Ko un kā atbildēt uz jautājumu, *kāda ir varbūtība, ka nejauši izraudzīts aptaujājamais prot angļu (krievu, vācu) valodu?*

Aprakstītajā izmēģinājumā (skat. 3.7. piemēra sākumu) nekas neliecina, ka mēs nevarētu lietot klasisko varbūtības definīciju. Tādā gadījumā to parasti arī lieto. Ja izmanto jau agrāk ievestos apzīmējumus, tad atbildes ir šādas: $P(A) = 0.5$, $P(V) = 0.55$ un $P(K) = 0.4$.

Līdzīgi, $P(A \cap V) = 0.2$, $P(A \cap K) = 0.23$, $P(V \cap K) = 0.07$, $P(A \cup K \cup V) = 0.94$.

Cik liela ir varbūtība, ka nejauši izraudzīts aptaujājamais prot vismaz angļu vai krievu valodu?

Var turpināt izmantot agrākos rezultātus, šoreiz to, ka $N(A \cup K) = 67$. Tad $P(A \cup K) = 0.67$. Bet var sākt izmantot zināmās varbūtību īpašības. Pēc P8

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K) = 0.5 + 0.4 - 0.23 = 0.67.$$

Mēs redzam, ka vismaz šajā piemērā notikumu varbūtības var aprēķināt tieši pēc klasiskās definīcijas, bet, kad vairākiem notikumiem tās jau zināmas, var lietot varbūtību īpašības tieši tādā pat veidā, kā iepriekš tika lietotas apjomu īpašības. ◀

Lasītājam var rasties iespaids, ka klasisko varbūtību teorija nav nekas īpaši jauns, salīdzinot ar pirms tam apspriesto notikumu apjomu rēķināšanu, kurai ir kombinatorisks raksturs. Lielā mērā tas tā arī ir. Tomēr jau ievadā mums bija iespēja vērot, ka klasisko varbūtību lietošana var dot neadekvātus rezultātus, ja izmēģinājumā sagaidāmie iznākumi pēc savas dabas nav vienlīdz iespējami.

Par izmēģinājumiem, kuros iznākumiem var būt arī citam no cita atšķirīgas varbūtības, būs runa nākamajā paragrāfā. Šo materiālu bez īpašām bažām var arī izlaist, vismaz pirmajā lasījumā. Vienīgi jāpatur prātā, ka visas desmit īpašības P1–P10, kā arī vispārīgais saskaitīšanas likums un tā sekas paliek spēkā un ir lietojamas arī neklasiskā gadījumā.

3.5. Varbūtiski izmēģinājumi

1. Ja izmēģinājumā nevaram rēķināties ar simetriju vai citiem apsvērumiem, kuri ļauj secināt, ka visi tā iznākumi ir vienlīdz varbūtīgi, tad rodas tīri praktiska problēma — kā zināt, kādas tad ir notikumu vai vismaz atsevišķu iznākumu īstās varbūtības. Noskaidrot izmēģinājumu iespējamo iznākumu varbūtības gan nav varbūtību teorijas uzdevums: tā piedāvā metodes, kā izrēķināt vienu notikumu varbūtības, ja ir jau zināmas kādu citu, ar pirmajiem saistītu notikumu varbūtības. Neielaižoties šeit tālākos prātojumos par pieminēto problēmu, piezīmēsim tikai divas lietas. Bieži vien vismaz aptuvenas varbūtību vērtības var noskaidrot eksperimentāli, daudzas reizes atkārtojot vienu un to pašu izmēģinājumu, kā tas notika ievada nodaļā piedāvātajos uzdevumos. Ja n atkārtojumos notikums A parādījies k reizes, tad daļskaitlis $\frac{k}{n}$ var tikt izmantots kā tuvināta A varbūtība; jo lielāks ir atkārtojumu skaits n , jo tuvāks šis skaitlis ir „īstajai” A varbūtībai. Šī ideja ir t.s. *statistiskās* varbūtību definīcijas pamatā.

Mēs sīkāk iepazīsimies ar citu paņēmieni, kurš ir dabisks tad, ja mūs interesējošais izmēģinājums ir saistīts ar kādu „klasisku” izmēģinājumu (ir atvasināts no tā). Bet sāksim atkal ar piemēriem.

3.14. PIEMĒRS. *Rikšošanas sacensību favorīti ir trīs zirgi Aleksandrs, Cēzars un Napoleons; pārējiem nav nekādu iespēju uzvarēt. Lietpratēji uzskata, ka nosaukto zirgu izredzes uzvarēt ir proporcijā 3 : 2 : 1. Cik liela ir iespēja, ka Cēzars neuzvarēs?*

Šīs sacensības ir izmēģinājums ar trim iespējamiem iznākumiem, kurus, atbilstoši pretendentu vārdu pirmajiem burtiem, apzīmēsim ar ω_a , ω_c un ω_n . Spriedīsim šādi: ja iznākuma ω_n (ka uzvarēs Napoleons) varbūtību $P(\omega_n)$ pieņem par p , tad jābūt $P(\omega_a) = 3p$ un $P(\omega_c) = 2p$. Bet cik liels ir p ? Paturēsim prātā 1. nodaļas atziņu, ka, lai būtu pamats salīdzināt arī pie dažādiem izmēģinājumiem piederošu notikumu varbūtības, ir noderīgi pieņemt, ka visu iznākumu varbūtību summa ikvienā izmēģinājumā ir viena un tā pati, proti, 1. Tad $3p + 2p + p = 1$, no kurienes $p = \frac{1}{6}$.

Tā esam noskaidrojuši varbūtības visiem trim iznākumiem. Nosakot varbūtības neelementāriem notikumiem, izrādās lietderīgi sekot jau klasisko varbūtību gadījumā atklātajam faktam, ka notikuma varbūtību var dabūt, saskaitot

tam labvēlīgo iznākumu varbūtības. Notikumam, ka Cēzars neuzvarēs (apzīmēsim to ar E), ir divi labvēlīgi iznākumi — ω_a un ω_n . Tad jautātā varbūtība $P(E)$ iznāk $\frac{5}{6}$. ◀

3.15. PIEMĒRS. Atcerēsimies, kā 1. nodaļā atklājām, ka divu vienādu spēļu kauliņu gadījumā iespējamajiem iznākumiem $[i, j]$ nav vienādas varbūtības. Tur redzējām, ka (un kāpēc) iznākumam $[i, j]$ ar dažādiem i un j ir divreiz lielāka iespēja parādīties, nekā iznākumam ar vienādiem i un j . Tālākais risinājās tāpat, kā iepriekšējā piemērā: mēs vienojāmies, ka $P([i, i]) = \frac{1}{36}$, bet $P([i, j]) = \frac{1}{18}$, kad $i \neq j$. ◀

2. Aplūkotie piemēri motivē šādas definīcijas.

Varbūtisks izmēģinājums ir izmēģinājums, kurā katram iespējamam iznākumam $\omega_j \in \Omega$ ir norādīts pozitīvs skaitlis p_j tā, ka $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, kur n , kā parasti, ir iespējamo iznākumu (kopas Ω elementu) skaits. Skaitli p_j sauc par *iznākuma ω_j varbūtību*; apzīmēsim to ar $P(\omega_j)$.

Pārvērtēsim par definīciju arī iepriekšējā (ceturtajā) paragrāfā atklāto notikuma varbūtības raksturojumu.

NOTIKUMA VARBŪTĪBAS DEFINĪCIJA. Varbūtiskā eksperimentā par *notikuma varbūtību* sauc visu tam labvēlīgo iznākumu varbūtību summu. Ja notikums ir neiespējams (t.i., Λ), tad šo summu pieņem vienādu ar 0.

Ja varbūtiskā eksperimentā izrādās ka visas norādītās varbūtības p_j ir vienādas, tad katra no tām ir vienāda ar $\frac{1}{n}$, bet patvaļīgam notikumam $P(A) = \frac{1}{n} \cdot N(A)$. Tā izrādās, ka klasiskās varbūtības ir atsevišķs gadījums — nevis pretstats! — šeit aprakstītajai shēmai. Norunāsim, ka

klasisks izmēģinājums — tas ir tāds varbūtisks izmēģinājums, kurā visiem iznākumiem varbūtības ir vienādas.

Dažkārt pat nešķir klasiskos izmēģinājumus no kombinatoriskajiem izmēģinājumiem agrākajā nozīmē (t.i., bez uzrādītām varbūtībām).

Apskatīsim vēl vienu ilustrējošu piemēru varbūtiska izmēģinājuma definīcijai.

3.16. PIEMĒRS. Metīsim atkal divus spēļu kauliņus un pieņemsim, ka mūs kā iespējamie iznākumi interesē tikai iespējamās uzkrītošo punktu summas

$s = 2, 3, \dots, 12$. Mums nav pamata sagaidīt, ka, izmēģinājumu daudzkārt atkārtojot, šīs summas parādīsies vienlīdz bieži — to rāda 1. tabula 5. paragrāfā. Bet ievērosim, ka mūsu šīsreizes izmēģinājuma iznākumi patiesībā ir notikumi A_s , kuru klasiskās varbūtības bija apkopotas 2. tabulā. Ir dabiski tās pašas varbūtības tagad pieņemt par šīsreizes izmēģinājuma iznākumu varbūtībām.

◀

Šī piemēra ideju var izklāstīt vispārīgā veidā šādi. Pieņemsim, ka mums ir kāds varbūtisks izmēģinājums α un ka $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ir pilna gadījumu sistēma tajā. Līdz ar to īstenībā ir dots vēl viens varbūtisks izmēģinājums β ar iznākumu kopu \mathcal{A} , kur par i -ā iznākuma A_i varbūtību ņemta notikuma A_i varbūtība izmēģinājumā α . Arī par šo β teiksim, ka šis izmēģinājums atvasināts no α .

Nobeigsim ar savdabīgu variāciju par 3.14. piemēru.

3.17. PIEMĒRS. Izskatīsim no šīs pozīcijas vēlreiz piemēru par rikšošanas sacensībām: „atvasināsim” šo izmēģinājumu no piemērota klasiska izmēģinājuma. Iedomāsimies sacensības, kurās sagadišanās dēļ piedalās trīs zirgi Aleksandri, divi Cēzari un viens Napoleons, pie kam tie visi ir vienādi spēcīgi un tāpat ar vienādām iespējām uzvarēt. Trīs notikumi

A: uzvarējis zirgs vārdā Aleksandrs,

C: uzvarējis zirgs vārdā Cēzars,

N: uzvarējis zirgs vārdā Napoleons

veido šādā izmēģinājumā pilnu gadījumu sistēmu. Izmēģinājums ir klasisks, tā ka šo notikumu varbūtības ir attiecīgi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ un $\frac{1}{6}$. Tādejādi, iepriekšējais izmēģinājums ar trim zirgiem, kuriem ir dažādas izredzes, ir atvasināts nupat apskatītā izmēģinājuma, identificējot *A* ar ω_a , *C* ar ω_c un *N* ar ω_n . ◀

3.8. VINGRINĀJUMS. Paskaidrojiet, kāpēc ikviens tāds varbūtisks izmēģinājums, kurā visuiznākumu varbūtības ir racionāli skaitļi, ir atvasināms no kāda klasiskaizmēģinājuma. (Norādījums: Pieņemiet, ka minētās varbūtības ir parasta daļskaitļa formā, un pievediet šos daļskaitļus pie kopsaucēja.) ◀

3. Visas varbūtību īpašības P1–P10 un citi iepriekšējā paragrāfa 4. punkta fakti saglabājas arī neklasiskiem varbūtiskiem izmēģinājumiem. Tas izriet no iepriekšējā vingrinājuma apgalvojuma, ja visas varbūtības ir racionāli skaitļi. Taču viss vajadzīgais dabūjams arī tieši — izmantojot varbūtību definīciju. Apskatīsim piemērus

Ņemsim atkal P4. Ja B izriet no A , tad, kā jau zinām, A labvēlīgo iznākumu kopa Ω_A ir B labvēlīgo iznākumu kopas Ω_B apakškopa. Pieņemsim, ka, piem., $\Omega_A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, bet $\Omega_B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Tad

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) = P(A) + P(\omega_4) + P(\omega_5).$$

Abi pēdējie saskaitāmie, kā teikts varbūtiska izmēģinājuma definīcijā, ir pozitīvi skaitļi, tāpēc $P(A) < P(B)$. (Kad varētu iznākt vienādība?)

Ņemsim P7. Ja, piem., $\Omega_A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, bet $\Omega_B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, tad

$$\Omega_{A \cup B} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}, \quad \Omega_{A \cap B} = \{\omega_1, \omega_2\}$$

un

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4), \\ P(B) &= P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6), \\ P(A \cup B) &= P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_6) = \\ &= (P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4)) + \\ &\quad + (P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6)) - (P(\omega_1) + P(\omega_2)) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Līdzīgi jāspriež arī vispārīgā gadījumā. Atstāsim citu īpašību pārbaudi neatlaidīgākam lasītājam.

3.6. Uzdevumi

1. Saskatiet kādu izmēģinājumu un norādiet tam piemērotu iespējamo iznākumu kopu katrā no tālāk aprakstītajām situācijām. Vai visos gadījumos šīs kopas (un paša izmēģinājuma) izvēle ir viennozīmīga? Novērtējiet, kur to var izdarīt, vai jūsu paredzētie iznākumi visi ir vienlīdz iespējami.

1. Tētis gudro, kurā mēnesī nākošgad ņemt atvaļinājumu.
 2. Juris, Andris un Mārīte spēlē riču-raču.
 3. Organizācija, kas gatavojas veikt sabiedriskās domas aptauju par dažiem jautājumiem, nolēmusi, ka tā anketās šķiros respondentus (aptaujājamos) pēc dzimuma un vecuma (jauns, vidēja vecuma, padzīvojis).
 4. Autofirma gatavojas izmēģināt jauna parauga automobili paaugstinātas grūtības apstākļos, reģistrējot līdz brīdim, kad kāds svarīgs automobiļa mezgls kļūst nelietojams, nobrauktos kilometrus.
 5. Kāda firma grib ievākt statistiku par meiteņu un zēnu skaitu trīs bērnu ģimenēs.
 6. Kastītē ir 5 bumbiņas, kas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 5. Vispirms tiek izraudzīta bumbiņa ar nepāra numuru, pēc tam meklē kādu ar pāra numuru.
 7. Monētu met tik ilgi, kamēr uzkrīt cipars, bet ne vairāk kā 10 reizes.
 8. 10.A klase un 11.B klase skolas turnīrā spēlē futbola maču.
2. Šai uzdevumā izrakstiet katra izmēģinājuma iespējamus iznākumus, kā arī labvēlīgos iznākumus katram no norādītajiem notikumiem.

1. Monētu met, līdz divreiz uzkrīt cipars, bet ne vairāk kā piecas reizes.

A: Monēta mesta tieši divas reizes,

B: Monēta mesta tieši trīsreiz,

C: Jau pirmajā metienā bijis cipars,

D: Monēta mesta visas piecas reizes, bet cipars bijis tikai vienreiz.

2. Pieci draugi (Aina, Bruno, Centis, Dina, Evija) ieguvuši divas biļetes uz operu, un ir jāizlemj, kuri divi ies.

K: Aina ies uz operu,

ATBILDES: 1. Nesavienojami ir B un C , C un D , C un E . No C izriet D un E , bet D un E izriet viens no otra (ir viens un tas pats notikums).

2. Nesavienojami ir A un D , A un C , B un C , D un E , D un F , E un F . No D izriet B un C .

3. Divreiz šaujot: savienojami ir A un E , B un D , B un E , C un D , D un E ; izriet E no A , D no B , E no B , D no C . Trīsreiz šaujot: tas pats, bet vēl C savienojams ar E , un no C izriet E .

4. Divas reizes met monētu. Ar A , B un C apzīmēti notikumi, ka pirmajā reizē uzkritis ģerbonis, ka otrajā reizē uzkritis ģerbonis, abas reizes monēta uzkritusi ar vienu un to pašu pusi uz augšu.

1. Ko nozīmē notikumi $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B - A$, $C - B$, $B - C$, \bar{A} , \bar{C} , $(A - B) \cup (B - A)$?

2. Pieņemot, ka monēta pareiza, aprēķināt šo notikumu varbūtības.

ATBILDES: 1. Abas reizes ģ; abas reizes ģ; vismaz vienreiz ģ; vai nu pirmoreiz ģ, vai arī abas reizes c; pirmoreiz c, bet otrreiz ģ; abas reizes c; pirmoreiz c, bet otrreiz ģ; pirmoreiz c; vienreiz ģ un vienreiz c; tieši vienreiz ģ (t.i, tas pats kas iepriekšējā gadījumā).

2. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

5. Krustmāte apsolijsi Aijai atsūtīt pašas adītu džemperu, tiklīdz iestāsies auksts laiks. Varbūtība, ka džemperis būs nepareiza izmēra, ir 0,47, ka tas būs nejaukā krāsā — 0,59, bet ka būs abas nelaiemes reizē — 0,31. Atrodiet varbūtības tam, ka džemperis būs

- (a) piemērotas krāsas, bet nepareiza izmēra,
- (b) otrādi — pareiza izmēra, bet nejaukā krāsā,
- (c) piemērotas krāsas un pareiza izmēra,
- (d) pareiza izmēra vai piemērotā krāsā,
- (e) pareiza izmēra vai nepiemērotā krāsā.

ATBILDES: (a) 0,16, (b) 0,28, (c) 0,25, (d) 0,69, (e) 0,84.

6. Varbūtība, ka skrējienā uzvarēs Jānis, ir $\frac{1}{2}$, ka Pēteris — $\frac{1}{3}$; vēl uzvarēt varētu vienīgi Juris.

1. Kādu jūs te saskatāt izmēģinājumu (ar kādiem iznākumiem)?
2. Kāda varbūtība, ka Juris uzvarēs?
3. Atrodiet šai izmēģinājumā divus dažādus notikumus, kuriem vienāda varbūtība.

Atbildes pamatojiet.

7. Mākslas koledžas students ir norūpējies par priekšā stāvošajiem eksāmeņiem angļu valodā un mākslas vēsturē. Pēc viņa domām, varbūtība nolikt eksāmenu angļu valodā ir 0,4, varbūtība nolikt kaut vienu eksāmenu — 0,6, bet varbūtība nolikt abus — tikai 0,1. Kāda ir varbūtība, ka viņš nokārtos mākslas vēstures eksāmenu? nenokārtos nevienu? Nokārtos tieši vienu?

ATBILDES: 0,2, 0,4, 0,5.

8. Jānis piedāvā, viņaprāt, godīgas derības ar 3 : 1, ka notiks notikums A , un ar 2 : 1, ka notiks B (tas nozīmē, ka Jāņa vērtējumā izredzes notikumam A notikt ir trīs reizes mazākas, bet notikumam B — divas reizes mazākas nekā nenotikt). Viņš zina, ka A un B nevar atgadīties vienlaikus. Kādas, Jāņaprāt, ir A un B varbūtības? Ar kādu nosacījumu Jānim vajadzētu pieņemt godīgas derības, ka notiks viens vai otrs no šiem notikumiem?

ATBILDE: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, 5 : 7.

9. Kādā ģimnāzijā ir 500 skolēnu. Ir zināms, ka no tiem

- 300 mācās angļu valodu,
- 200 mācās vācu valodu,
- 50 mācās franču valodu,
- 20 mācās franču un angļu valodu,
- 30 mācās vācu un franču valodu,
- 20 mācās vācu un angļu valodu,
- 10 mācās visas trīs valodas.

- (a) Vai ir kāds, kurš nemācās nevienu no šīm valodām?
- (b) Cik ir tādu, kas mācās tieši divas valodas?
- (c) Kāda ir varbūtība katrai no trim valodām, ka uz labu laimi izvēlēts ģimnāzists šo valodu nemācās?

(d) Kāda ir varbūtība, ka viņš mācās tieši vienu valodu?

ATBILDES: (a) jā; (b) 40; (c) $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(\bar{F}) = 0.9$, $P(\bar{V}) = 0.6$; (d) 0.9.

10. Eksāmenā ir 15 vieglas un 10 grūtas biļetes. Jānis ņem biļeti pirmais, Pēteris — pēc viņa.

(a) Kāda ir varbūtība, ka Jānim būs viegla biļete?

(b) Jānis ir dabūjis vieglu biļeti. Kāda ir varbūtība, ka arī Pēterim tiks viegla biļete?

(c) Pēterim ir viegla biļete. Kāda ir varbūtība, ka tāda bijusi arī Jānim?

(d) Kāda ir varbūtība, ka Jānim un Pēterim abiem vieglas biļetes?

(e) Kad uz eksāmenu atnāk Juris, palikusi tikai viena biļete. Kāda ir varbūtība, ka tā būs viegla?

ATBILDES: (a) $\frac{15}{25}$, (b) $\frac{14}{24}$, (c) $\frac{14}{24}$, (d) $\frac{7}{20}$, (e) $\frac{15}{25}$.

11. Nākošajā dienā tāds pats eksāmens ir paralēlklasē. Nevienam nemanot, pirms eksāmena caurvējš vienu biļeti ir nopūtis uz grīdas.

(a) Kāda ir varbūtība, ka pazudusī biļete ir viegla?

(b) Kāda šoreiz ir varbūtība, ka pirmā no atlikušajām biļetēm paņemtā būs viegla?

(c) Izrādās, ka pirmā paņemtā biļete tiešām ir viegla. Kāda tagad ir varbūtība, ka viegla ir arī pazudusī?

ATBILDES: (a) $\frac{15}{25}$, (b) $\frac{15}{25}$, (c) $\frac{14}{24}$.

12. Pie sešām standarta detaļām piejaukušās četras brāķētas. Montieris paņēma četras no šīm desmit detaļām. Cik liela ir varbūtība, ka tās visas atbilst standartam?

ATBILDE: $\frac{C_6^4}{C_{10}^4}$ jeb $\frac{1}{14}$.

A pielikums: Formulu kopsavilkums

$$\text{K1: } C_n^0 = A_n^0 = \bar{C}_n^0 = \bar{A}_n^0 = 0,$$

$$\text{K2: } C_n^0 = A_n^1 = \bar{C}_n^1 = \bar{A}_n^1 = 1,$$

$$\text{K3: } \bar{A}_n^r = n^r,$$

$$\text{K4: } A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!},$$

$$\text{K5: } P_n = A_n^n,$$

$$\text{K6: } P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!,$$

$$\text{K7: } P_n = A_n^r P_{n-r},$$

$$\text{K8: } A_n^r = \frac{P_n}{P_{n-r}},$$

$$\text{K9: } A_n^r = C_n^r P_r,$$

$$\text{K10: } C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{P_n}{P_r P_{n-r}},$$

$$\text{K11: } C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

$$\text{K12: } C_n^r = C_n^{n-r},$$

$$\text{K13: } \bar{C}_n^r = \bar{C}_{r+1}^{n-1},$$

$$\text{K14: } C_n^r = \bar{C}_{r+1}^{n-r},$$

$$\text{K15: } \bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1},$$

$$\text{K16: } \bar{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!},$$

$$\text{K17: } P(r_1, r_2, \dots, r_n) = C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_2} C_{r-r_1-r_2}^{r_3} \cdots C_{r-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1}}^{r_n},$$

$$\text{K18: } P_r = P(r_1, r_2, \dots, r_n) P_{r_1} P_{r_2} \cdots P_{r_n},$$

$$\text{K19: } P(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{P_r}{P_{r_1} P_{r_2} \cdots P_{r_n}} = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_n!},$$

$$\text{K20: } C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r,$$

$$\text{K21: } \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n,$$

$$\text{K22: } \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0,$$

$$K23: \sum_{i=0}^n C_n^i \bar{A}_k^i \bar{A}_l^{n-i} = \bar{A}_{k+l}^n.$$

BINOMIĀLĀ TEORĒMA. Jebkuram naturālam n ,

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}.$$

TEORĒMA PAR APAKŠKOPU SKAITU. Kopai, kurai ir n elementu, ir 2^n apakškopu.

$$N1: 0 \leq N(A) \leq n,$$

$$N2: N(A) = 0 \text{ t.t.t., ja } A = \Lambda,$$

$$N3: N(A) = n \text{ t.t.t., ja } A = V,$$

$$N4: \text{ja no } A \text{ izriet } B, \text{ tad } N(A) \leq N(B),$$

$$N5: \text{ja } A \text{ un } B \text{ ir savienojami, tad } N(A) + N(B) \leq n,$$

$$N6: A \text{ un } B \text{ nav savienojami t.t.t., ja } N(A \cap B) = 0,$$

$$N7: N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B),$$

$$N8: \text{ja } A \text{ un } B \text{ nav savienojami, tad } N(A + B) = N(A) + N(B),$$

$$N9: N(A - B) = N(A) - N(A \cap B),$$

$$N10: N(\bar{A}) = n - N(A).$$

VISPĀRĪGAIS APJOMU SASKAITĪŠANAS LIKUMS: Ja notikums A ir sadalāms gadījumos A_1, A_2, \dots, A_m , tad $N(A) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_m)$.

$$P1: 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$P2: P(A) = 0 \text{ t.t.t., ja } A = \Lambda,$$

$$P3: P(A) = 1 \text{ t.t.t., ja } A = V,$$

$$P4: \text{ja no } A \text{ izriet } B, \text{ tad } P(A) \leq P(B),$$

$$P5: \text{ja } A \text{ un } B \text{ ir savienojami, tad } P(A) + P(B) \leq 1,$$

$$P6: A \text{ un } B \text{ nav savienojami t.t.t., ja } P(A \cap B) = 0,$$

$$P7: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

P8: ja A un B nav savienojami, tad $P(A + B) = P(A) + P(B)$,

P9: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$,

P10: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

VISPĀRĪGAIS VARBŪTĪBU SASKAITĪŠANAS LIKUMS: Ja notikums A ir sadalāms gadījumos A_1, A_2, \dots, A_m , tad $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$.

B pielikums: Par kādu uzziņu materiālu

Labi pazīstamā triju autoru uzdevumu krājuma

D. Kriķis, P. Zariņš, V. Ziobrovskis, *Diferencēti uzdevumi matemātikā*,

kura trešais izdevums 1996. gadā iznācis apgādā *Zvaigzne ABC*, pirmās daļas pirmajā pusē atrodami uzdevumi algebrā un analīzes elementos, tai skaitā — par kombinatoriku un varbūtību teoriju. Šīs pašas grāmatas otrajā pusē (10. nodaļā) rodams attiecīgs uzziņas materiāls teorijā. Vairāki tur sniegtie formulējumi ir lasāmi un lietojami ar zināmu piesardzību, un par tiem sniegsim dažus komentārus (katreiz citējot attiecīgo tekstu), kas ļautu izvairīties no pārpratumiem vai pat nepareizībām. Šie komentāri adresēti vispirms skolotājam, kurš minēto uzziņas materiālu varbūt gribētu izmantot klasē.

1. *Dažādas kādu priekšmetu grupas (galīgas kopas), kas cita no citas atšķiras vai nu ar priekšmetu secību, vai arī ar pašiem priekšmetiem, sauc par savienojumiem jeb izlasēm.*

Izšķir šādus savienojumu veidus: permutācijas, variācijas, kombinācijas.

1. Šī definīcija nav piemērojama izlasēm ar atkārtojumiem, kuras parādās gan uzdevumos, gan arī tālāk uzziņās.
2. Pie pirmā teikuma var rasties jautājums, vai ar grupām un galīgām kopām domāti vieni un tie paši veidojumi, kas tiek raksturoti ar dažādiem vārdiem, lai raisītu piemērotas asociācijas. Bet varbūt gribēts pateikt, ka daži no savienojumiem ir grupas, bet citi — galīgas kopas? Jeb vai piezīme iekavās paskaidro, kas domāts ar mazāk skaidru vārdu 'grupas'?
3. „... vai nu ar priekšmetu secību, vai arī ar pašiem priekšmetiem ...”. Lietotais saiklis *vai nu – vai* mudina domāt, ka ja divas grupas atšķiras gan ar vienu, gan ar otru, tad tās nav izlases. Ja kāds sadomās salīdzināt vienu kombināciju no 5 pa 3 un vienu variāciju no 4 pa 2 — ko lai viņš secina?
4. Kopumā definīcija liek domāt, ka izlases nevar apskatīt un atpazīt pa vienai, bez salīdzināšanas ar ar citām. Bet kāda jēdziena labai, skaidrai, klasiskas uzbūves definīcijai būtu jānorāda t.s. dzimtes pazīme (šeit tā ir — grupas) un t.s. sugas atšķirība, pēc kuras par katru atsevišķu objektu ar dzimtes pazīmi varētu noteikt, vai tas pieder definējamam jēdzienam, vai nē (tās šeit trūkst).

Kā tad rīkoties? Šī mācību līdzekļa autors praksē pārlicinājies, ka ir vērts sekot tiem, kuri nevis cenšas dot visaptverošu izlases definīciju (ar kādu skolēnam pazīstamu vienkāršāku, bet skaidru jēzienu starpniecību to lai izdara?), bet tai vietā paskaidro, kā izlases rodas, kad izdara atkārtotas izvēles. Ar to pietiek, lai varētu uzdevumos atpazīt tā vai cita veida izlases, un arī lai par tām pierādītu vienkāršākos faktus. Arī pats termins 'izlase' tad ir izteiksmīgāks. (Starp citu, literatūrā ir redzama arī tradīcija pieskaitīt savienojumiem bez izlasēm arī dažu veidu izvietojumus.)

2. *n elementu pamatkopas sakārtotas k -izlases bez atkārtojumiem ($k < n$) sauc par variācijām bez atkārtojumiem no n elementiem pa k elementiem.*

1. Šeit, un arī tālāk kombināciju definīcijā, jau pieteikta iespēja, ka izlase varētu būt arī ar atkārtojumiem. Bet izlases jēdziena definīcijā par atkārtošanos nekādu mājienu nav.
2. Būtu jāpatur prātā, ka literatūrā gandrīz nekur neizslēdz robežgadījumu $k = n$ un līdz ar to ļauj permutācijām būt īpaša veida variācijām (tāpat kā kvadrāti ir īpaša veida taisnstūri). Tā darīts arī šai mācību līdzeklī.

3. *Dažu kombinatorisku uzdevumu klasifikācijas un atrisināšanas shēma parādīta 38. zīmējumā.*

1. 38. zīmējums, kuru šeit neatkārtosim, ir mazliet nekritiski pārpublicēts no citas grāmatas, un bez tur palikušajiem paskaidrojumiem nav īsti saprotams, ko ar to iesākt. Zīmējumā saglabājušies arī nepaskaidroti simboli P_n^k un $P_{n,k}$.
2. Nav norādes, kādiem uzdevumiem šī shēma derīga un, galvenais, kad to nevajag mēģināt lietot.

Ja šo zīmējumu izmanto, tad jāievēro, ka tas piemērojams vienīgi vienkāršiem uzdevumiem, kuros vaicāts pēc tādu vai citādu izlašu skaita un tātad atbilde aprakstāma ar vienu pamatskaitli.

4. Zem zīmējuma ir īpašība 3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ ($0 < m < n$).

Šī sakarība spēkā arī ar $m = 0$, un bez šī robežgadījuma zemāk attēloto Paskāla trijstūri nevar satādīt.

5. *Varbūtību teorijā izšķir šāda veida notikumus: a) gadījuma notikumi; b) nenovēršami notikumi; c) neiespējami notikumi; d) elementāri notikumi.*

Šis paziņojums liek domāt, ka bez gadījuma, nenovēršamiem un neiespējamiem notikumiem ir vēl kādi, un tie tad ir tie elementārie. Patiesībā te d) ir svešķermenis, kurš nojauc t.s. iedalījuma bāzi un līdz ar to padara lietas mazāk saprotamas. (Salīdzinājumam cits paziņojums: govīs mēdz būt lielas, mazas, vidēji lielas un ālavas.)

Turklāt pārpratumus var veicināt arī tas, ka (kā izriet no tālākās definīcijas 7. punktā) elementārība ir relatīva lieta: pat vienā izmēģinājumā elementāro notikumu sistēmas var izraudzīties dažādi. Šai mācību līdzekli izturēts nedaudz citāds redzes viedoklis par izmēģinājumiem, atbilstoši kuram katrā izmēģinājumā elementāro notikumu sistēma ir viennozīmīgi noteikta.

6. *Notikumu B sauc par neatkarīgu no notikuma A , ja notikuma B realizēšanās nav atkarīga no tā, vai notikums A ir realizējies.*

1. Tātad uzzinām, ka (nedaudz noapaļojot tekstu) B sauc par neatkarīgu no A , ja B realizēšanās nav atkarīga no A realizēšanās — t.i., ja B nav atkarīgs no A .
2. Šis teksts kā definīcija varbūtību teorijā ir pilnīgi nederīgs, jo satur visai dažādi iztulkojamu frāzi '*notikuma B realizēšanās*', vēl otru '*nav atkarīga*', un turklāt tajā nav nekā no varbūtībām. Kaut ko varētu glābt, ja vārda '*realizēšanās*' vietā rakstītu '*realizēšanās varbūtība*', bet arī tad teikuma beigu daļa ir maldinoša: tur taču jāpasaka, ka $P(B|A) = P(B)$, nevis ka $P(B|A) = P(B|\bar{A})$.

Ko darīt? Saut B par neatkarīgu no A , ja ir spēkā pirmā no tikko rakstītajām vienādībām.

7. *DARBĪBU AR VARBŪTĪBĀM* 3. punktā teikts, ka atkarīgu notikumu A un B reizinājuma varbūtību dod formula $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Šo formulu pārāk bieži sauc par varbūtību reizināšanas formulu *atkarīgiem* notikumiem. Tad rodas nevajadzīgs akcents uz atkarību, bet formula ir derīga *jebkuriem*, arī neatkarīgiem notikumiem. Uzsvaram vajadzētu būt tādām, ka atkarīgiem notikumiem varbūtību *nevar rēķināt* pēc 2. punktā dotās īsās formulas $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. (Mēs taču nesaucam formulu $\frac{1}{2}bc \sin \alpha$ par laukuma aprēķināšanas formulu slīpleņķu trijstūriem: mēs sakām, ka tās speciālgadījums $\frac{1}{2}bc$ ir formula taisnleņķa trijstūriem.)

8. Turpat 4. punktā teikts, ka savienojamu notikumu A un B summas varbūtību dod formula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (grāmatā ir drukas kļūda: $A \cap B$ vietā tur ir $A|B$).

Tieši tāpat šo formulu pārāk bieži sauc par varbūtību saskaitīšanas formulu *savienojamiem* notikumiem, kaut gan tā tikpat labi der nesavienojamiem, kad taču $P(A \cap B) = 0$.